УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ВЯЗКОУПРУГИХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМИ ЧИСЛАМИ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

[1*]***Юсупов М.***, [1]***Каршиев Д.К.***, [2]***Шарипова У.Б.***
*ysupovmajid1956@mail.ru
[1]Ташкентский государственный аграрный университет,
100140, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университет, д. 2А;
[2]Университет Alfraganus,
100190, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Юкори Каракамыш, д. 2В.

Рассмотрены задачу о динамические гасители колебаний наследственно - деформируемых систем с конечными числами степеней свободы. Реологические свойства пружину (подвеску) учитывается с использованием интегральной модель с ядре релаксации Колтунова-Ржаницына. Рассматривается поведение системы с гасителем при свободных затухающих колебаниях, вызванных заданными начальными условиями, а также при постоянных, импульсных и периодических внешних воздействиях. Полученные результаты позволяют сделать вывод о целесообразности применения динамических гасителя для уменьшения амплитуде колебании как в идеально-упругих, так и в наследственно-деформируемых системах при переходных процессах. Для решения задач, применена вычислительный алгоритм, основанного на использование квадратурные формуле.

Ключевые слова: деформация, релаксация, мгновенная жесткость, реологические свойства, вязкоупругость, физическая нелинейность, интегральный оператор, ядро наследственности.

Цитирование: *Юсупов М., Каршиев Д.К., Шарипова У.Б.* Численное моделирование нелинейных задач динамики вязкоупругих систем с конечными числами степеней свободы // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 1(55). – С. 111-121.

1 Введение

Высокий уровень вибрации машин, нередко являются причиной их усталостных повреждений и в некоторых случаях – полного разрушения. Для повышения надежности машин уровень вибрации должен быть снижен отстройкой от резонансных зон или введением различных демпфирующих устройств. В ряде случаев отстройка от резонансных зон может потребовать изменение жесткостей и масс в конструкции машин, а это может оказаться менее выгодным, чем применение динамических гасителей колебаний наследственно-деформируемых систем.

Динамические гасители колебаний, как некоторые дополнительные устройства, вводимые в исходные расчетные схемы виброзащитных систем, могут рассматриваться как одно из средств управления состоянием объекта защиты. Показано, что математические модели колебательных систем в виде структурных схем эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления обладают определенными преимуществами по сравнению с обычными подходами на основе использования дифференциальных уравнений. Динамическое гашение в структурных моделях интерпретируется как введение дополнительных цепей отрицательной обратной связи. Такие цепи формируются на основе структурных преобразований исходной модели по правилам параллельного и последовательного соединения пружины [1–3].

Установлено, что введение дополнительных настроечных масс существенно изменяет вид амплитудно-частотных характеристик, в частности, формирование таких форм, которые создают возможности размыва точечных частот динамического гашения колебаний до их представлений в виде зон с усреднено-постоянным значением коэффициентов передачи амплитуды колебаний от источника возмущений к объекту [4].

Актуальность проблемы непрерывно возрастает в связи с увеличением размеров конструкции, повышением скорости машин, ужесточением санитарных и технологических требований к допустимым уровням колебаний [5]. При исследовании данной проблемы важные значении имеет учет неупругого сопротивления гасителя и защищаемой системы. В работах [6–9] учет неупругого сопративления осуществляется согласно элементарной теории вязкоупругости и модель «Комплексная жесткость», предложенная Е.С. Сорокиным [10]. Эти теории имеет серьезные недостатки, они не учитывают фактор времени, связанный с ползучестью деформации и релаксации напряжений. Наследственные теории вязкоупругости являются самыми общими при учете неупругих сопротивлений материала, так как они одновременно учитывают как внутреннее трение, так и ползучесть деформации и релаксации напряжений материала. Поэтому разработка более эффективных методов расчета колебаний с учетом рационального их использования при решении различных задач наследственно-деформируемых элементов конструкций машин является весьма актуальной.

2 Постановка задачи

Пусть дана защищаемая конструкция массой m_1, опирающаяся на нелинейно наследственно-деформируемую пружину (подвеску) с мгновенной жесткостью c_1 находящейся под действием внешней нагрузки $q(t)$ (рис.1). Рассмотрим движение системы I, положение которой определяется обобщенными координатами $u_1(t)$. Присоединим к этой системе специальное устройство массой m_2, которое с помощью нелинейно наследственно-деформируемой пружины, с мгновенной жесткостью c_2, при соединена к защищаемой конструкции. Тогда получим систему II с двумя степенями свободы (рис.2), положения которой в любой момент времени определяются обобщенными координатами $u_1(t)$ и $u_2(t)$.

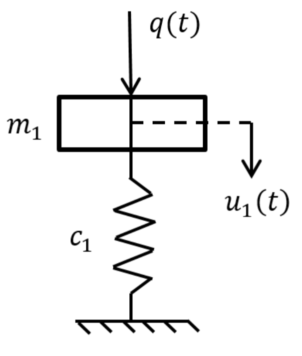

Рис. 1 Система I.

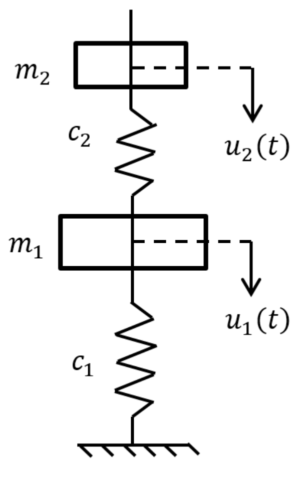

Рис. 2 Система II.

Предлагается, что реологические свойства подвески разные и подчиняются кубичной нелинейной наследственной теории вязкоупругости [11, 12]. Тогда, согласно вариационному принципу наследственной теории вязкоупругости [11] кинетическая, потенциальная энергия и работа внешних сил вычисляется следующим образом:

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{u}_1^2 + m_2\dot{u}_2^2\right), P = q\,(t)\,u_1;$$

$$\Pi = \frac{c_1}{2}\left\{u_1\left[u_1 + \frac{\gamma_1}{2}u_1^3 - 2R_1^*\left(u_1 + \gamma_1 u_1^3\right)\right]\right\} +$$
$$+\frac{c_2}{2}\left\{(u_1-u_2)\left[u_1 - u_2 + \frac{\gamma_2}{2}(u_1-u_2)^3 - 2R_2^*\left[u_1 - u_2 + \gamma_2(u_1-u_2)^3\right]\right],\right\}$$

где γ_i, $(i = 1, 2)-$ коэффициент физической нелинейности, который меньше нуля $(\gamma_i < 0)$ для материала с мягкими и больше нуля $(\gamma_i > 0)$ для материала с жесткими характеристиками. R_i^*-интегральные операторы Вольтерра, которые

$$R_i^* f\,(t) = \int_0^t R_i\,(t-\tau) f\,(\tau)\, d\tau,$$

где $R_i\,(t) = \varepsilon_i e^{-\beta_i t} t^{\alpha_i - 1}-$ ядро наследственности, имеющие слабо-сингулярные особенности типа Абеля.

Уравнение Лагранжа для рассматриваемой системы имеет вид:

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} = 0,\ i = 1, 2, \tag{1}$$

где

$$L = \Pi - T - P;$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = c_1\,(1-R^*)\left(u_1 + \gamma_1 u_1^3\right) + c_2\,(1-R^*)\left[u_1 - u_2 + \gamma_2(u_1-u_2)^3\right] - q\,(t)\,;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1} = -m_1\dot{u}_1; \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2} = -m_2\dot{u}_2; \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = -c_2\,(1-R^*)\left[u_1 - u_2 + \gamma_2(u_1-u_2)^3\right].$$

Подставляя (2) в (1), получим:

$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 + c_1\,(1-R_1^*)\,(u_1 + \gamma_1 u_1^3) + m_2\ddot{u}_2 = q\,(t)\,; \\ m_2\ddot{u}_2 - c_2\,(1-R_2^*)\left[u_1 - u_2 + \gamma_2(u_1-u_2)^3\right] = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Система нелинейных слабо-сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) (3) описывает математическую модель задачи динамических гасителей колебаний систем с нелинейно наследственно-деформируемыми подвесками.

В случае переходного процесса в систему ИДУ (3) необходимо добавить и начальные условия, т.е.:

$$u_i\,(0) = \alpha_{0i}, \quad \dot{u}_i\,(0) = \alpha_{1i}, \qquad i = 1, 2. \tag{4}$$

Система ИДУ (3) является достаточно общей: если подвески защищаемой конструкции идеально-упругие, то $R_1^* = 0$; если задача линейная, то $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

3 Метод решения

Полагая $\tau = \omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{m_1}{c_1}}$, записываем уравнения колебаний защищаемой системы и гасителя в безразмерном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u}_1 + (1 - R_1^*)\,(u_1 + \gamma_1 u_1^3) + \nu \ddot{u}_2 = q_0 \cdot q\,(t)\,; \\ \ddot{u}_2 - \mu^2\,(1 - R_2^*)\left[u_1 - u_2 + \gamma_2 (u_1 - u_2)^3\right] = 0. \end{array} \right. \tag{5}$$

Параметры $\nu = \frac{m_2}{m_1}$, $\mu^2 = \frac{c_2}{m_2}\omega^2$ играет в теории динамических гасителей колебаний (ДГК) большую роль, будем их далее называть относительной массой и настройкой гасителя. ДГК называется устройство, в котором возникает сила инерции, уменьшающая уровень колебаний защищаемой конструкции. Параметры гасителя следует подобрать так, чтобы он существенно уменьшал амплитуду или полностью гасил вынужденные колебания, определяемые первой обобщенной координатой в основной системе I с одной степенью свободы, в том случае, когда при отсутствии гасителя при гармонических нагрузках происходило бы явление резонанса.

Главная задача переходного процесса заключается в том, что с помощью вычислительного эксперимента найти параметры ДГК существенно повышающие темп затухания переходного процесса. Установка динамического гасителя с наследственно-деформируемыми подвесками должна существенно повысить рассеяние энергии в системе и благоприятно повлиять на переходные режимы вынужденных колебаний защищаемой конструкции с учетом и без учета наследственно-деформируемых свойств подвески. Чтобы проследить этот процесс, рассмотрим численные решения системы нелинейно слабо-сингулярных ИДУ (5).

Решая систему (5) при начальных условиях (4) методом, изложенным в [13–15], имеем:

$$\begin{gathered} u_{1n}{=}\alpha_{01}{+}\alpha_{11}t_n{+}q_0\sum_{i=0}^{n-1}A_i\,(t_n{-}t_i)\,q_i{-} \\ -\sum_{i=0}^{n-1}A_i\,(t_n{-}t_i)\left\{u_{1i}{+}\gamma_1 u_{1i}^3{+}\nu f^2\left[u_{1i}{-}u_{2i}{+}\gamma_2(u_{1i}{-}u_{2i})^3\right]\right\}+ \\ +\sum_{i=0}^{n-1}A_i\Gamma_1\,(t_n{-}t_i)\left(u_{1i}{+}\gamma_1 u_{1i}^3\right){+}\nu f^2\sum_{i=0}^{n-1}A_i\Gamma_2\,(t_n{-}t_i)\left[u_{1i}{-}u_{2i}{+}\gamma_2(u_{1i}{-}u_{2i})^3\right]; \\ u_{2n}{=}\alpha_{02}{+}\alpha_{12}t_n{-}f^2\sum_{i=0}^{n-1}A_i\Gamma_2\,(t_n{-}t_i)\left[u_{1i}{-}u_{2i}{+}\gamma_2(u_{1i}{-}u_{2i})^3\right], \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$t_n{=}n{\cdot}\Delta t,\ (n{=}\ 0,1,2,\ldots)\,;\, u_{1i}{=}u_1\,(t_i)\,;\, u_{2i}{=}u_2\,(t_i)\,;$$

$$q_i{=}q\,(t_i)\,;\ A_0{=}A_n{=}\frac{\Delta t}{2};\, A_j{=}\Delta t,\ \ j{=}\overline{1,\, n{-}1};$$

$$\Gamma_p\,(t_n{-}t_i)=\int_0^{t_n-t_i}(t_n{-}t_i{-}\tau)\,R_p\,(\tau)\,d\tau,\quad (p{=}\ 1,2)\,;\qquad R_p\,(t)=\varepsilon_p e^{-\beta_p t}{\cdot}t^{\alpha_p-1}.$$

4 Результаты

Составлена компьютерная программа для численной реализации разработанного алгоритма расчета при произвольных внешних воздействиях. Рассматривается поведение системы с гасителем при свободных затухающих колебаниях, вызванных заданными начальными условиями. На рис. 3-6 показано влияние гасителя на свободные колебания системы при начальных условиях $u_i\,(0) = 0,4$ и $\dot{u}_i\,(0) = 0,$ $(i = 1, 2)$.

Здесь и в дальнейшем, сплошной и пунктирной линии, соответствует к решению задач без гасителя $(\nu = 0)$ и с гасителем.

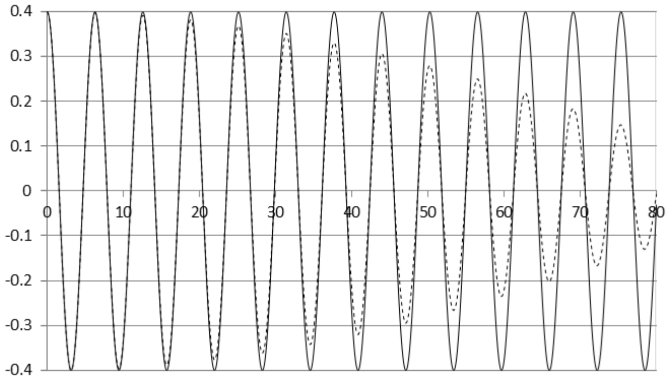

Рис. 3 $\alpha = 0,8;$ $\beta = 0,05;$ $\varepsilon = 0;$ $\gamma = 0;$ $\nu = 0,001$

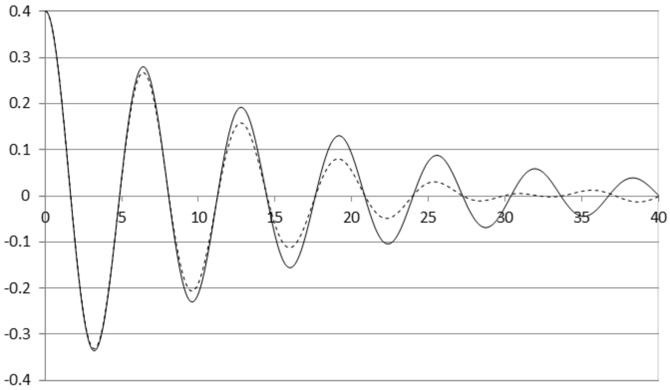

Рис. 4 $\alpha = 0,8;$ $\beta = 0,05;$ $\varepsilon = 0,1;$ $\gamma = 0;$ $\nu = 0,01$

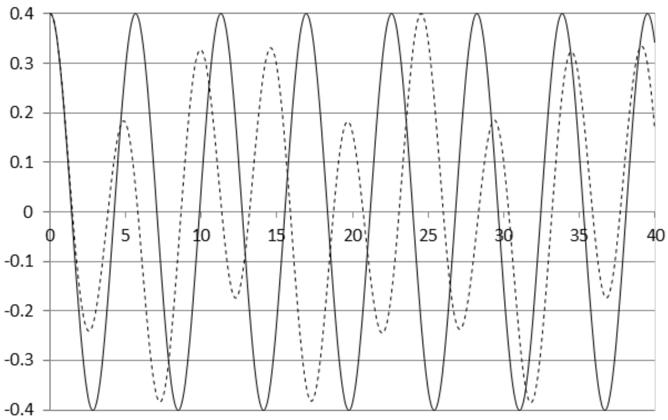

Рис. 5 $\alpha = 0,8;$ $\beta = 0,05;$ $\varepsilon = 0;$ $\gamma = 2;$ $\nu = 0,001$

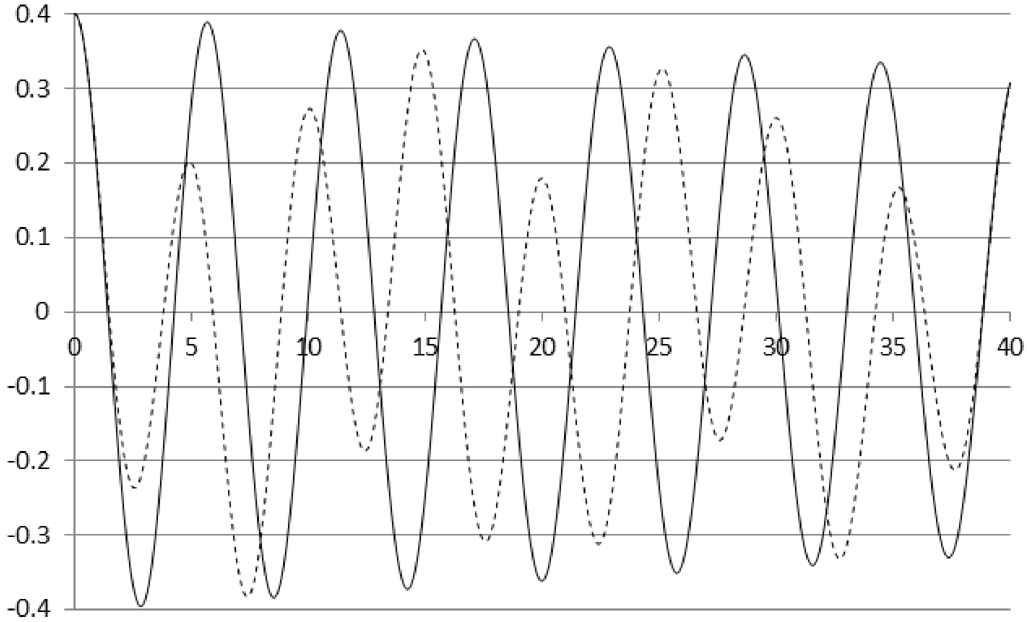

Рис. 6 $\alpha = 0,8; \quad \beta = 0,05; \quad \varepsilon = 0,01; \quad \gamma = 2; \quad \nu = 1,2$

ДГК можно использовать не только при затухающих свободных колебаниях, вызванных начальными условиями, но при постоянных, импульсных и периодических внешних воздействиях. Здесь оптимальные параметры гасителя целесообразно выбирать из условия, что за конечный промежуток времени колебания главной массы, вызванные указанными внешними воздействиями, необходимо уменьшить до заданного уровня. В таких случаях переходной процесс, сопровождающийся биениями, может быть более приемлемым, чем равномерно затухающий на бесконечном интервале времени.

На рис. 7-10 показано влияние ДГК на вынужденные колебания при: $q_0 = 1$; $q = 0,07$; $\nu = 0,001;\ 0,05;\ 0,075;\ 1$; $W_0 = 1$; $q_0 = 1$; $u_1(0) = 0,4$; $u_2(0) = 0,4$; $\dot{u}_1(0) = 0$; $\dot{u}_1(0) = 0$. Аналогичные результаты при: $q_0 = 1$; $q(t) = sin\theta t$; $\theta = 0,\ \frac{\pi}{2},\ 1$ приведены на рис. 11-16.

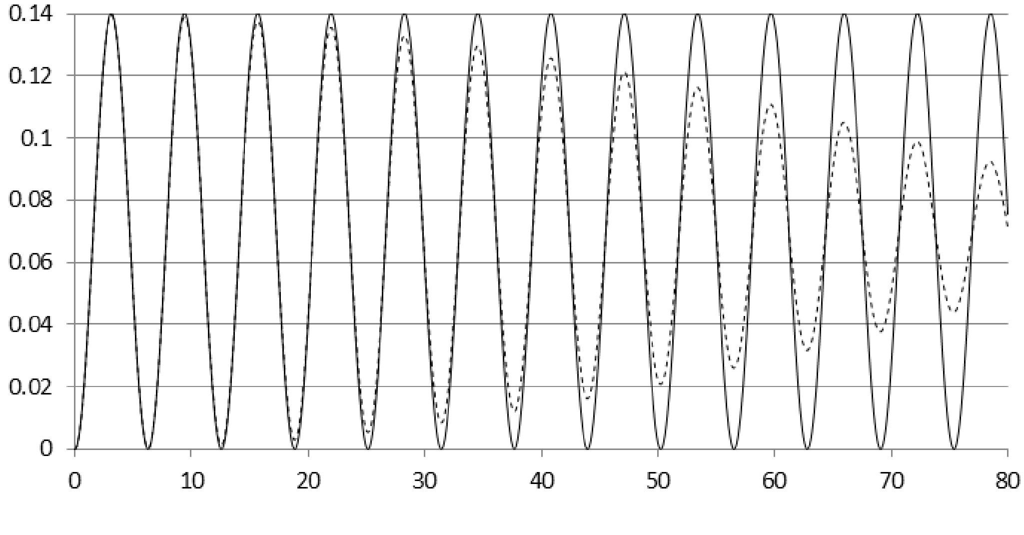

Рис. 7 $\alpha = 0,8; \quad \beta = 0,05; \quad \varepsilon = 0; \quad q = 0,07; \quad \gamma = 0; \quad \nu = 0,001$

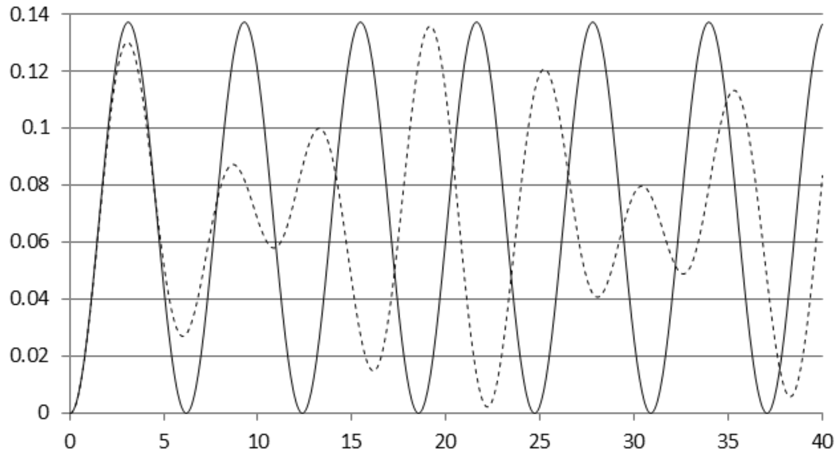

Рис. 8 $\alpha = 0,8; \quad \beta = 0,05; \quad \varepsilon = 0; \quad q = 0,07; \quad \gamma = 2; \quad \nu = 0,001$

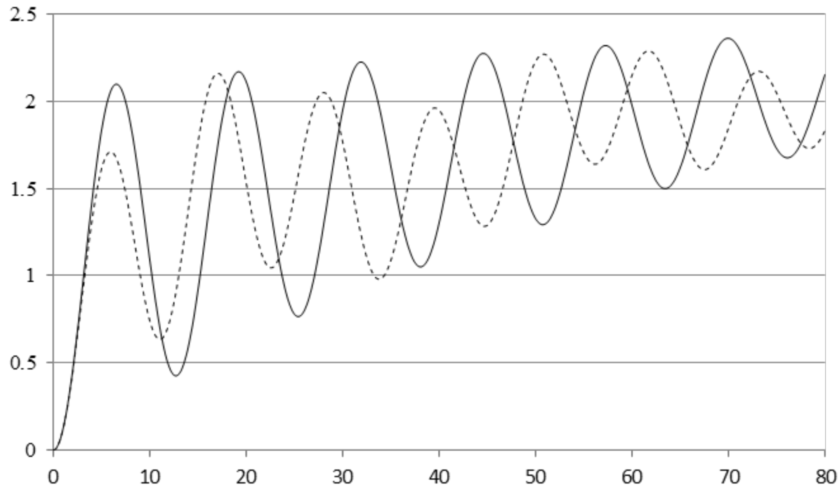

Рис. 9 $\alpha = 0,8; \quad \beta = 0,05; \quad \varepsilon = 0,05; \quad q = 1; \quad \gamma = 0; \quad \nu = 1,5$

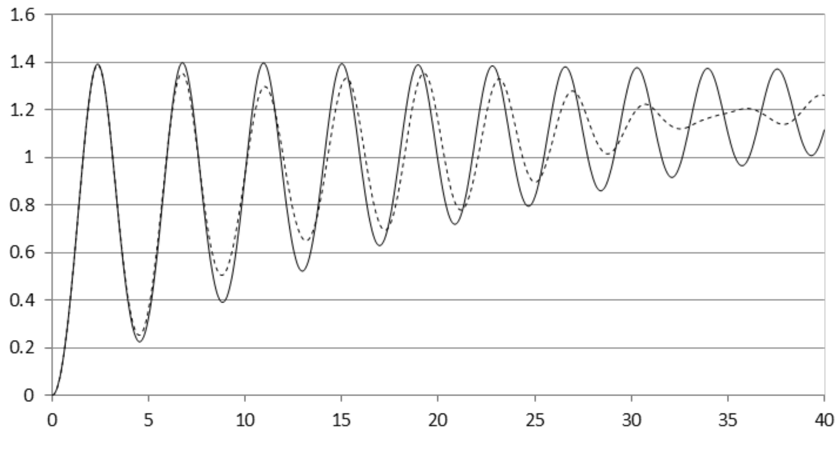

Рис. 10 $\alpha = 0,8; \quad \beta = 0,05; \quad \varepsilon = 0,05; \quad q = 1; \quad \gamma = 0,5; \quad \nu = 0,01$

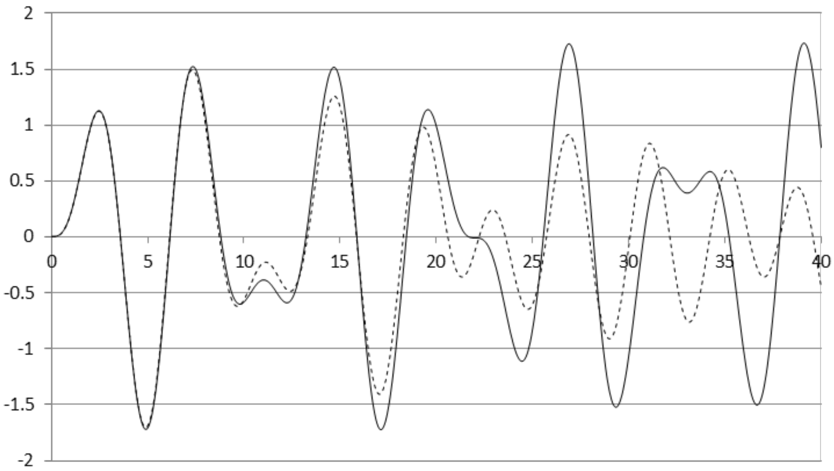

Рис. 11 $\alpha = 0,8;\quad \beta = 0,05;\quad \varepsilon = 0;\quad q = sin\frac{\pi t}{2};\quad \gamma = 0;\quad \nu = 0,01$

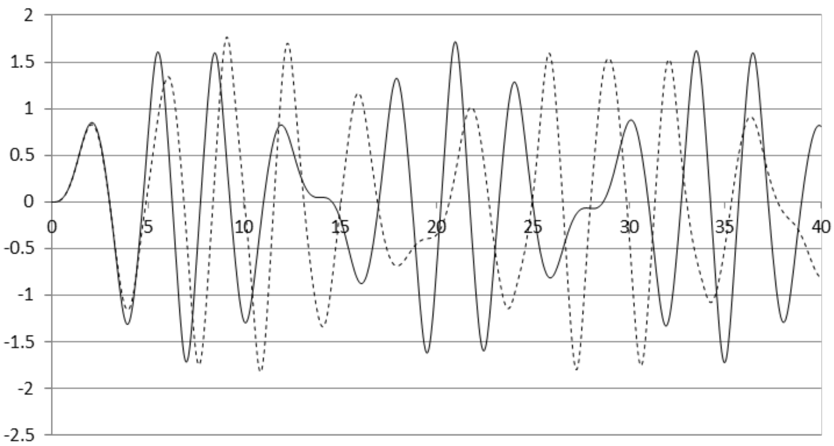

Рис. 12 $\alpha = 0,8;\quad \beta = 0,05;\quad \varepsilon = 0;\quad q = sin\frac{\pi t}{2};\quad \gamma = 2;\quad \nu = 0,1$

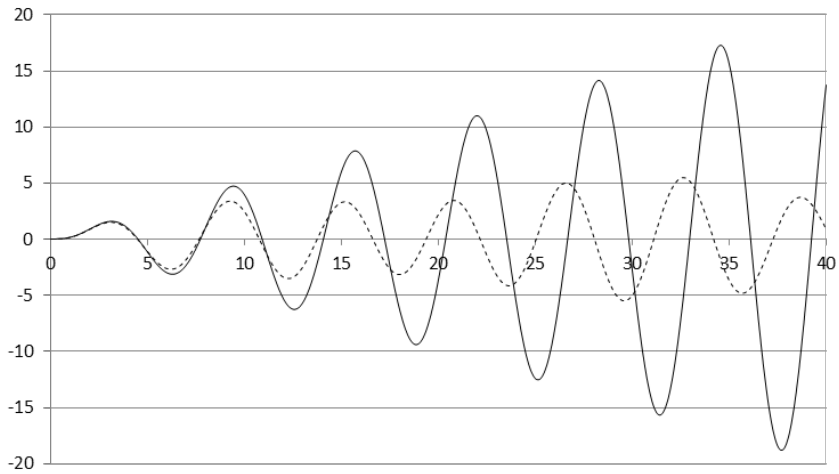

Рис. 13 $\alpha = 0,8;\quad \beta = 0,05;\quad \varepsilon = 0;\quad q = sint;\quad \gamma = 0;\quad \nu = 0,1$

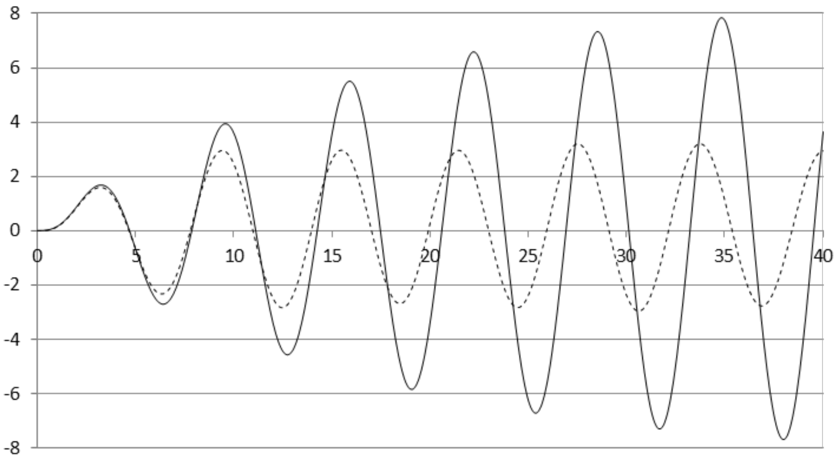

Рис. 14 $\alpha = 0,8; \quad \beta = 0,05; \quad \varepsilon = 0,1; \quad q = sint; \quad \gamma = 0; \quad \nu = 0,1$

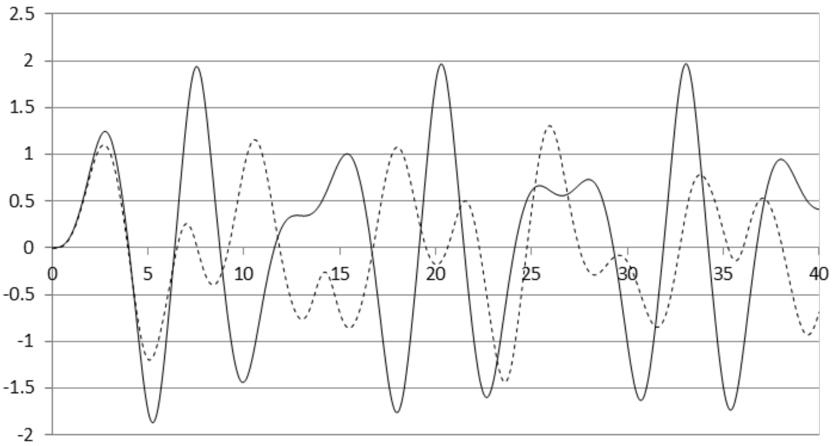

Рис. 15 $\alpha = 0,8; \quad \beta = 0,05; \quad \varepsilon = 0; \quad q = sint; \quad \gamma = 0,5; \quad \nu = 0,7$

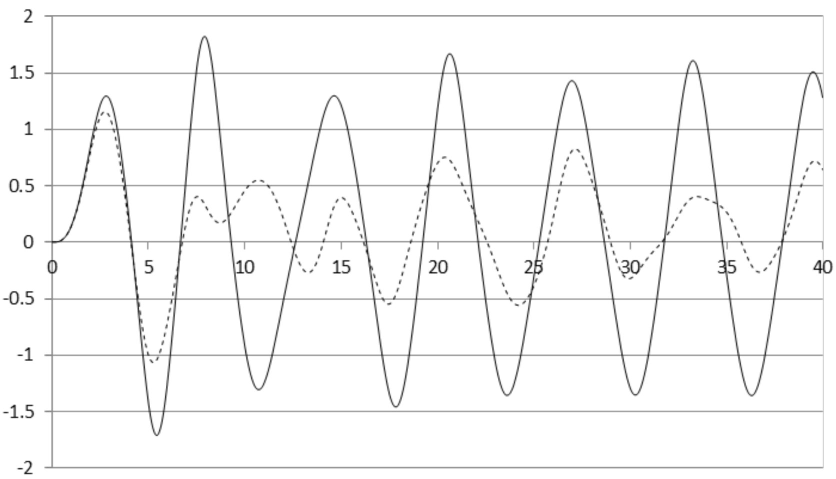

Рис. 16 $\alpha = 0,8; \quad \beta = 0,05; \quad \varepsilon = 0,1; \quad q = sint; \quad \gamma = 0,5; \quad \nu = 0,7$

5 Заключение

Таким образом, решение задач виброгашения связано с необходимостью проведения многократных расчетов в процессе оптимизации параметров гасителей. Поэтому в ряде случаев целесообразно проведение предварительных расчетов по упрощенным расчетным схемам для выяснения ориентировочной эффективности и параметров виброзащитной системы. Использование схем, допускающих получение решения в замкнутом виде или с помощью алгоритмов типа (6), представляет собой весьма большой интерес. Именно эти возможности предоставляет значительная часть данной работы, не говоря, конечно, о тех случаях, когда расчетная схема конструкции непосредственно отражается рассмотренными здесь наследственно-деформируемыми моделями. Полученные результаты позволяют сделать вывод о целесообразности применения динамических гасителя для уменьшения амплитуда колебаний как в идеально-упругих, так и в наследственно-деформируемых системах при переходных процессах.

Литература

[1] *Елисеев С.В., Артюнин А.И.* Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем. – Новосибирск: Наука, 2016. – 459 с.

[2] *Елисеев С.В.* Динамический гаситель колебаний как средство управления динамическим состоянием виброзащитной системы // Научное издание МГТУ им. Н.Э.Баумана, Наука и образование. – 2011. – №8. – С. 1-11.

[3] *Хоменко А.П., Елисеев С.В.* О некоторых свойствах динамического гашения колебаний в механических системах. – Иркутск: ИГУ, 2000. – 293 с.

[4] *Нгуен Д.Х.* Возможности рычажного корректора в задачах динамического гашения колебаний // Вестник ИрГТУ. – 2017. – Т. 21, №8. – С. 38-48.

[5] *Алдошин Г.Т.* Теория линейных и нелинейных колебаний. – Санкт-Петербург: ЛАНЬ, 2013. – 320 с.

[6] *Коренов Б.Г., Резников Л.М.* Динамические гасители колебаний. – М.: Наука, 1988. – 303 с.

[7] *Карамышкин И.И.* Динамическое гашение колебаний. М.: Машиностроение, 1988. – 106 с.

[8] *Елесеев С.В., Нерубенко Г.П.* Динамические гасители колебаний. – Новосибирск: Наука, 1982. – 144 с.

[9] *Пановка Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1987. – 352 с.

[10] *Сорокин Е.С.* К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. – М.: Госстройиздат, 1960. – 131 с.

[11] *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.

[12] *Каудерер Г.* Нелинейная механика. – М.: Мир, 1961. – 778 с.

[13] *Yusupov M. et al.* Vertical vibrations of traction engine with viscoelastic suspension // E3S Web of Conference Series. – 2023. – Vol. 365. – doi: `http://dx.doi.org/10.1051/e3sconf/202336501022`.

[14] *Yusupov M. et al.* Vehicle oscillation taking into account the rheological properties of the suspension // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 896. – doi: `http://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/896/1/012141`.

[15] *Mirzaev S. et al.* Vibrations of high-rise buildings under seismic impact taking into account physical nonlinearity // Journal of Physics: Conference Series. – 2022. – Vol. 2176. – doi: http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2176/1/012052.

Поступила в редакцию 05.02.2024

UDC 539.3

NUMERICAL SIMULATION OF NONLINEAR PROBLEMS OF DYNAMICS OF VISCOELASTIC SYSTEMS WITH FINITE NUMBERS OF DEGREES OF FREEDOM

[1*] ***Yusupov M.***, [1] ***Karshiev D.K.***, [2] ***Sharipova U.B.***
*ysupovmajid1956@mail.ru
[1]Tashkent State Agrarian University,
2A, University Str., Tashkent, 100140, Uzbekistan;
[2]Alfraganus University,
2B, Yukori Karakamysh Str., Tashkent, 100190 Uzbekistan.

The problem of dynamic vibration dampers of hereditarily deformable systems with finite numbers of degrees of freedom is considered. The rheological properties of the spring (suspension) are taken into account using an integral model with the Koltunov-Rzhanitsyn relaxation kernel. The behavior of a system with a damper is considered under free damped oscillations caused by given initial conditions, as well as under constant, pulsed and periodic external influences. The results obtained allow us to conclude that it is advisable to use dynamic dampers to reduce the amplitude of vibrations in both ideally elastic and hereditarily deformable systems during transient processes. To solve problems, a computational algorithm based on the use of quadrature formulas was used.

Keywords: deformation, relaxation, instantaneous stiffness, rheological properties, viscoelasticity, physical nonlinearity, integral operator, heredity kernel.

Citation: Yusupov M., Karshiev D.K., Sharipova U.B. 2024. Numerical simulation of nonlinear problems of dynamics of viscoelastic systems with finite numbers of degrees of freedom. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 1(55): 111-121.

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 1(55) 2024

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(99871) 231-92-45.
E-mail: journals@airi.uz.
Сайт: www.pvpm.uz (journals.airi.uz).

Дизайн и компьютерная вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 29.02.2024 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №1. Тираж 100 экз.

Содержание