УДК 519.63

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ СКОРОСТЯМИ И ПОГРЕШНОСТЬЮ ИЗМЕРЕНИЯ*

[1]***Алоев Р.Д.***, [2,3]***Бердышев А.***, [1*]***Алимова В.***
*vasilarobiyaxon@gmail.com
[1]Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университет, д. 4;
[2]Казахский национальный педагогический университет имени Абая,
050010, Казахстан, г. Алматы, пр-т Достык, д. 13;
[3]Институт информационных и вычислительных технологий МНВО РК,
050010, Казахстан, г. Алматы, пр-т Достык, д. 13;
[1]Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университет, д. 4.

В настоящей работе исследуется проблема стабилизации состояние равновесия для гиперболического уравнения с *отрицательной* нелокальной характеристической скорости и ошибкой измерения. Приведена постановка смешанной задачи управления. Дано определение слабого решения, экспоненциальной устойчивости равновесия смешанной задачи и функции Ляпунова. Доказана теорема об экспоненциальной устойчивости равновесия смешанной задачи. Определяется устойчивость в ℓ^2-норме относительно дискретного возмущения состояния равновесия начально-краевой разностной задачи. Построена дискретная функция Ляпунова и доказана теорема устойчивости состояния равновесия начально-краевой разностной задачи в ℓ^2-норме относительно дискретного возмущения.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальная характеристическая скорость, устойчивость, явная разностная схема.

Цитирование: *Алоев Р.Д., Бердышев А., Алимова В.* Исследование экспоненциальной устойчивости численного решения гиперболического уравнения с отрицательными нелокальными характеристическими скоростями и погрешностью измерения // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 1(55). – С. 122-139.

1 Введение

В работе [1] исследуется вопрос устойчивости решения скалярного закона сохранения с положительной нелокальной скоростью, который моделирует производственную систему с высокой реентерабельностью, встречающуюся в производстве полупроводников. Спектральным анализом получена экспоненциальная устойчивость решения линеаризованной системы управления. Кроме того, с помощью функции Ляпунова доказана экспоненциальная устойчивость решения нелинейной управляемой системы в некоторых случаях.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (номер гранта AP14872379).

В статье [2] исследуется устойчивость решения класса нелинейных уравнений переноса с положительной нелокальной скоростью. Он моделирует систему с высоким уровнем повторного входа, которая широко используется в производстве полупроводников. Экспоненциальная устойчивость решения задачи постоянного равновесия доказана методом функций Ляпунова. Методом функций Ляпунова получена экспоненциальная устойчивость дискретной системы.

Работа [3] посвящена исследованию экспоненциальной устойчивости равновесия для скалярного закона сохранения с положительной нелокальной скоростью и ошибкой измерения, возникающей в производственной системе с высокой реентерабельностью. С помощью подходящей функции Ляпунова доказываются достаточные и необходимые условия на устойчивость как для непрерывной так и для дискретной задачи.

Статьи [9–16] посвящены проблемам построения и исследования экспоненциальной устойчивости численного решения смешанных задач для гиперболических систем. В них предлагаются системный подход к построению и исследованию адекватности вычислительных моделей для смешанной диссипативной краевой задачи, поставленной для симметричных t-гиперболических систем. Рассматривается одномерные и двумерные гиперболические системы, с переменными коэффициентами и младшими членами, а также со стандартными диссипативными граничными условиями. Построены разностные схемы для численного расчета устойчивых решений поставленных задач. Построены дискретные аналоги функции Ляпунова для численной проверки устойчивости решений рассматриваемых задач. Получены априорные оценки дискретного аналога функции Ляпунова. Эти оценки позволяет утверждать об экспоненциальной устойчивости численного решения. Доказаны теоремы об экспоненциальной устойчивости решения краевой задачи для гиперболической системы и об устойчивости разностной схемы в пространствах Соболева. Эти теоремы об устойчивости дают нам возможность доказать сходимость численного решения.

Общие задачи устойчивости с граничным управлением изучались в последние годы в [5, 6] для гиперболических систем и недавно в [1, 2, 4] для скалярных законов сохранения с нелокальной скоростью. Целью является получение асимптотической устойчивости вокруг данного равновесия, такой, чтобы решения законов сохранения достигали состояния равновесия, когда время стремится к бесконечности. Такое свойство достигается с помощью результата об экспоненциальной устойчивости, представленного, например, в ([7], теорема 2.3) для квазилинейных гиперболических систем. Дальнейшие ссылки на гиперболические законы баланса и другие гиперболические системы можно найти в недавней книге [8].

Заметим, что во всех работах [1–3] рассматриваются случай положительных характеристических скоростей для скалярного случая.

А в работах [9–16] не рассматриваются нелокальные характеристические скорости.

В настоящей работе результаты этих работ переносятся на случай гиперболической системы с отрицательными нелокальными характеристическими скоростями.

2 Дифференциальная смешанная задача

Рассмотрим следующую симметрическую t-гиперболическую систему:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \mathrm{M}\left(A\left(t\right)\right)\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad t \in \left[0, +\infty\right), \ x \in \left[0, 1\right], \tag{1}$$

где

$$\mathrm{M}\left(A\left(t\right)\right) \triangleq diag\left({}_1\mu\left({}_1a\left(t\right)\right), {}_2\mu\left({}_2a\left(t\right)\right), \cdots, {}_n\mu\left({}_na\left(t\right)\right)\right),$$
$$U \triangleq \left({}_1u,\ {}_2u, \cdots, {}_nu\right)^T,\ \ A\left(t\right) \triangleq \left({}_1a\left(t\right), {}_2a\left(t\right), \cdots, {}_na\left(t\right)\right)^T,$$

${}_i\mu\left(s\right)$ - некоторые заданные функции.

Здесь характеристические скорости $\mathrm{M}\left(A\left(t\right)\right)$ зависеть от интеграла неизвестной вектор функции $U\left(t,x\right)$ по всей области $[0,1]$

$$A\left(t\right) = \int_0^1 U\left(t,x\right)\,dx,\ \ t \in \left(0,+\infty\right) \tag{2}$$

или покомпонентно

$${}_ia\left(t\right) = \int_0^1 {}_iu\,dx,\ \ i = \overline{1,n}.$$

Начальные условия для системы (1):

$$U\left(0,x\right) = \Phi\left(x\right),\quad x \in \left[0,1\right]. \tag{3}$$

Здесь $\Phi\left(x\right) \triangleq \left({}_1\varphi\left(x\right), {}_2\varphi\left(x\right), \cdots, {}_n\varphi\left(x\right)\right)^T$- заданная начальная вектор функция.

В этой работе ограничиваемся случаем, когда функции характеристических скоростей отрицательные, т.е. $\mathrm{M}\left(A\left(t\right)\right) > 0$. В таком случае из теории гиперболических систем известно, что граничные условия для системы (1) требуются только на правой границе, при $x = 1$:

$$-\mathrm{M}\left(A\left(t\right)\right)U\left(t,1\right) = V\left(t\right), \tag{4}$$

где $V\left(t\right) \triangleq \left({}_1V\left(t\right), {}_2V\left(t\right), \cdots, {}_nV\left(t\right)\right)^T$ - вектор-функция контроллер.

Из работ [1] и [2] следует, что при соответствующем выборе $\mathrm{M}\left(A\left(t\right)\right),\ U\left(t,0\right),\ V\left(t\right)$ можно доказать корректность постановки смешанной задачи (1)-(4).

В этой работе рассмотрим один частный случай задания граничных условий.

$$-V\left(t\right) + \mathrm{M}^*U^* = R\left\{-\mathrm{M}\left(A\left(t\right)\right)\left[U\left(t,0\right) + \Delta\left(t\right)\right] + \mathrm{M}^*U^*\right\},\ \ t \in \left(0,+\infty\right), \tag{5}$$

где

$$\mathrm{M}^* \triangleq \mathrm{M}\left(U^*\right) = diag\left({}_1\mu\left({}_1u^*\right), {}_2\mu\left({}_2u^*\right), \cdots, {}_n\mu\left({}_nu^*\right)\right),$$
$$U^* \triangleq \left({}_1u^*, {}_2u^*, \cdots, {}_nu^*\right)^T,\ \ R \triangleq diag\left({}_1r, {}_2r, \cdots, {}_nr\right),$$
$$\Delta\left(t\right) \triangleq \left({}_1\delta\left(t\right), {}_2\delta\left(t\right), \cdots, {}_n\delta\left(t\right)\right)^T$$

и ${}_ir \in [0,1),\ i = \overline{1,n}$ - заданные коэффициенты, а U^*, где ${}_iu^* > 0,\ i = \overline{1,n}$ - заданное состояние равновесия и $\Delta\left(t\right)$-ограниченное возмущение. Заметим, что при заданном состоянии равновесия U^*, значение характеристической вектор-функции вычисляется следующим образом

$$-\mathrm{M}\left(A\left(t\right)\right)\big|_{\bar{\bar{U}}=\bar{\bar{U}}^*} = -\mathrm{M}\left(U^*\right).$$

В настоящей работе ограничиваемся следующим семейством характеристических скоростей типа

$${}_i\mu\left(s\right) = \frac{{}_iP}{{}_iQ + s},\quad s \in \left[0,+\infty\right),\ \ i = \overline{1,n} \tag{6}$$

с ${}_iP > 0,\quad {}_iQ > 0,\ \ \forall i \in \left\{m+1, m+2, \cdots, n\right\}.$

Итак, рассмотрим следующую смешанную задачу управления

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - \mathrm{M}\left(A\left(t\right)\right) \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad t \in [0, +\infty), \ x \in (0,1), \\ U\left(0,x\right) = \Phi\left(x\right), \quad x \in (0,1), \\ -V\left(t\right) + \mathrm{M}^* U^* = R\left\{-\mathrm{M}\left(A\left(t\right)\right)\left[U\left(t,0\right) + \Delta\left(t\right)\right] + \mathrm{M}^* U^*\right\}, \ t \in (0, +\infty), \\ -\mathrm{M}\left(A\left(t\right)\right) U\left(t,1\right) = V\left(t\right), \ t \in [0, +\infty), \\ A\left(t\right) = \int_0^1 U\left(t,x\right)\, dx, \ \ t \in (0,+\infty), \end{cases} \tag{7}$$

где U-подлежащая определению вектор-функция.

Рассмотрим преобразования относительно равновесия U^*:

$$\tilde{U}\left(t,x\right) = U\left(t,x\right) - U^*, \quad \tilde{A}\left(t\right) = A\left(t\right) - U^*, \quad \tilde{\Phi}\left(x\right) = \Phi\left(x\right) - U^*,$$

$$\tilde{\mathrm{M}}_{\tilde{A}}\left(t\right) = \mathrm{M}\left(U^* + \tilde{A}\left(t\right)\right).$$

Тогда система (7) с (6) для $t \in (0, +\infty)$ может быть переписана так

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - \tilde{\mathrm{M}}_{\tilde{A}}\left(t\right) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = 0, \quad x \in (0,1), \\ \tilde{U}\left(0,x\right) = \tilde{\Phi}\left(x\right), \ \ x \in (0,1), \\ \tilde{V}\left(t\right) = R\tilde{\mathrm{M}}_{\tilde{A}}\left(t\right)\left[\tilde{U}\left(t,0\right) + \Delta\left(t\right)\right] + \left(E - R\right)\left\{\mathrm{M}^* - \tilde{\mathrm{M}}_{\tilde{A}}\left(t\right)\right\} U^*, \\ \tilde{\mathrm{M}}_{\tilde{A}}\left(t\right) = \mathrm{M}\left(U^* + \tilde{A}\left(t\right)\right), \ \ \tilde{\mathrm{M}}_{\tilde{A}}\left(t\right) \tilde{U}\left(t,1\right) = \tilde{V}\left(t\right) \\ \tilde{A}\left(t\right) = \int_0^1 \tilde{U}\left(t,x\right) dx \ \ \text{где} \ \ \int_0^1 {}_i\tilde{u}\left(t,x\right) dx \geqslant -{}_iu^*, \ i = \overline{1,n}, \\ {}_i\mu\left(s\right) = \frac{{}_iP}{{}_iQ + s}, \ \ \text{с} \ {}_iP > 0, \ \ {}_iQ > 0, \ \ s \in [0, +\infty), \ \ i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{8}$$

Используя выражения заданными для функций $\mu_i, \ i = \overline{1,n}$ характеристических скоростей (6) в уравнении (8), мы имеем

$$\left\{\mathrm{M}^* - \tilde{\mathrm{M}}_{\tilde{A}}\left(t\right)\right\} U^* = \begin{bmatrix} diag\left(\frac{{}_1P}{{}_1Q + {}_1u^*}, \cdots \frac{{}_nP}{{}_nQ + {}_nu^*}\right) - \\ diag\left(\frac{{}_1P}{{}_1Q + {}_1u^* + {}_1\tilde{a}(t)}, \cdots \frac{{}_nP}{{}_nQ + {}_nu^* + {}_n\tilde{a}(t)}\right) \end{bmatrix} U^* =$$

$$= diag\left(\begin{array}{c} \frac{{}_1P_1\tilde{a}(t)}{({}_1Q + {}_1u^*)({}_1Q + {}_1u^* + {}_1\tilde{a}(t))}, \cdots, \\ \frac{P_n\tilde{a}_n(t)}{({}_nQ + {}_nu^*)[{}_nQ + {}_nu^* + {}_n\tilde{a}(t)]} \end{array}\right) U^* = \Omega\tilde{\mathrm{M}}_{\tilde{A}}\left(t\right)\tilde{A}\left(t\right), \tag{9}$$

где

$$\Omega \triangleq diag\left({}_1\varpi, {}_2\varpi, \cdots, {}_n\varpi\right), \qquad {}_i\varpi = \frac{{}_iu^*}{{}_iQ + {}_iu^*}, \ \ i = \overline{1,n}.$$

Заметим, что справедливо матричное неравенство $\Omega < E$. Для удобства мы опускаем символ «$\sim$». Тогда для $t \in (0, +\infty)$система в уравнении (8) с уравнением (9) может быть переписана в следующем виде:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\frac{\partial U}{\partial t} - \mathrm{M}_A\left(t\right)\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad x \in \left(0, 1\right), \\
U\left(0, x\right) = \Phi\left(x\right), \ \ x \in \left(0, 1\right), \\
V\left(t\right) = R\mathrm{M}_A\left(t\right)\left[U\left(t, 0\right) + \Delta\left(t\right)\right] + \left(E - R\right)\Omega\mathrm{M}_A\left(t\right)A\left(t\right), \\
\mathrm{M}_A\left(t\right) = \mathrm{M}\left(U^* + A\left(t\right)\right), \quad \mathrm{M}_A\left(t\right)U\left(t, 1\right) = \bar{V}\left(t\right), \\
A\left(t\right) = \int_0^1 U\left(t, x\right)dx \ \ 345 \qquad \int_0^1 {}_iu\left(t, x\right)dx \geqslant -{}_iu^*, \ i = \overline{1, n}, \\
{}_i\mu\left(s\right) = \frac{{}_iP}{{}_iQ + s}, \ \text{с} \ {}_iP > 0, \ \ {}_iQ > 0, \ s \in \left[0, +\infty\right), \ \ i = \overline{1, n}.
\end{array}
\right.
\tag{10}
$$

3 Экспоненциальная устойчивость численного решения

В этом разделе мы устанавливаем экспоненциальной устойчивости численного решения начально-краевой разностной задачи.

Для получения начально-краевой разностной задачи, мы применим противопоточную разностную схему для численного расчета системы (7).

Для этого, покрываем пространственную область [0, 1] с помощью равномерной сетки $\Omega_h = \left\{x_j = ih, \ \ j = \overline{0, J}\right\}$, $h -$ шаг по x. Интеграл $A\left(t\right)$ для каждого значения по $t^k \triangleq k\tau \left(\tau = \text{шаг по времени}\right)$, $\ k \in \left\{0, 1, 2, \cdots\right\}$ вычислим с помощью квадратурной формулы

$$
A^k \triangleq \left({}_1a^k, {}_2a^k, \cdots, {}_na^k\right)^T, \ \ {}_ia^k = h\sum_{j=0}^{J}{}_iu_j^k, \quad k \in \left\{0, 1, 2, \cdots\right\}. \tag{11}
$$

Далее определим дискретное значение M^k

$$
\begin{gathered}
\mathrm{M}^k \triangleq \mathrm{M}\left(A^k\right) \equiv diag\left({}_1\mu^k, {}_2\mu^k, \cdots, {}_n\mu^k\right), \\
{}_i\mu^k \triangleq \mu\left({}_ia^k\right) = \frac{{}_iP}{{}_iQ + {}_ia^k}, \ \ {}_iP > 0, \ \ {}_iQ > 0, \ \ i = \overline{1, n}; \ \ k \in \left\{0, 1, 2, \cdots\right\}.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Предположим, что выполнено условия Куранта-Фридрихса-Леви

$$
0 < \Lambda^k \triangleq \frac{\tau}{h}\mathrm{M}^k \leqslant E, \quad k \in \left\{0, 1, 2, \cdots\right\}, \tag{13}
$$

где $\Lambda^k = diag\left({}_1\lambda^k, {}_2\lambda^k, \cdots, {}_n\lambda^k\right)$, ${}_i\lambda^k = \frac{\tau}{h}{}_i\mu^k$, $i = \overline{1, n}$; $k \in \left\{1, 2, \cdots K\right\}$.

Для численного решения системы (7) предлагаем противопоточную разностную схему

$$
\left\{
\begin{array}{l}
U_j^{k+1} = \left(1 - \Lambda^k\right)U_j^k + \Lambda^k U_{j+1}^k, \quad j = \overline{0, J-1}; \ \ k \in \left\{0, 1, \cdots\right\}; \\
U_J^{k+1} = RU_0^{k+1} + \left(E - R\right)\left(\mathrm{M}^k\right)^{-1}\mathrm{M}^*U^* + R\Delta^{k+1}, \quad k \in \left\{0, 1, \cdots\right\}; \\
U_j^0 = \Phi\left(x_j\right), \qquad j = \overline{0, J}.
\end{array}
\right.
\tag{14}
$$

$$
U_j^k = \left({}_1u_j^k, {}_2u_j^k, \cdots, {}_nu_j^k\right)^T, \ \Delta^k \triangleq \left({}_1\delta^k, {}_2\delta^k, \cdots, {}_n\delta^k\right)^T.
$$

Введем в рассмотрение следующие матрицы:

$$U^k \triangleq diag\left({}_1u_0^k, {}_2u_0^k, \cdots, {}_nu_0^k, {}_1u_1^k, {}_2u_1^k, \cdots, {}_nu_1^k, \cdots\cdots, {}_1u_{J-1}^k, {}_2u_{J-1}^k, \cdots, {}_nu_{J-1}^k\right),$$
$$U^0 \triangleq diag\left({}_1\varphi_0, {}_2\varphi_0, \cdots, {}_n\varphi_0, {}_1\varphi_1, {}_2\varphi_1, \cdots, {}_n\varphi_1, \cdots\cdots, {}_1\varphi_{J-1}, {}_2\varphi_{J-1}, \cdots, {}_n\varphi_{J-1}\right),$$
$$U^* \triangleq diag\left(\overbrace{{}_1u^*, {}_2u^*, \cdots, {}_nu^*, {}_1u^*, {}_2u^*, \cdots, {}_nu^*, \cdots\cdots, {}_1u^*, {}_2u^*, \cdots, {}_nu^*}^{n\times J}\right),$$
$$\Delta^k \triangleq diag\left({}_1\delta^k, {}_2\delta^k, \cdots, {}_n\delta^k\right).$$

Определение 1. Пусть $\Xi > 0$. Состояние равновесия U^* начально-краевой разностной задачи (14) является устойчивым в l^2-норме относительно дискретных возмущений, которые удовлетворяют матричным неравенствам $\Delta^k \leqslant \Xi,\ k \in \{1, 2, \cdots\}$, если существуют положительные вещественные константы $\zeta_1 > 0,\ \zeta_2 > 0$ и $\zeta_3 > 0$ такие, что для любого начального условия $\Phi(x_j),\ j = \overline{0, J}$ решение $U_j^k,\ k \in \{1, 2, \cdots\},\ j = \overline{0, J}$ начально-краевой разностной задачи (14) удовлетворяет неравенству

$$\left\|U^k - U^*\right\|_{l^2} \leqslant \zeta_2 e^{-\zeta_1 t^k} \left\|\Phi - U^*\right\|_{l^2} + \zeta_3 \max_{0\leqslant s<k}\left(|\Delta^s|\right), \quad k \in \{1, 2, \cdots\}, \tag{15}$$

где

$$U^k \triangleq \begin{pmatrix} U_0^k \\ U_1^k \\ \cdots \\ U_{J-1}^k \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi(x_0) \\ \Phi(x_1) \\ \cdots \\ \Phi(x_{J-1}) \end{pmatrix}, \quad U^* \triangleq \left.\begin{pmatrix} U^* \\ U^* \\ \cdots \\ U^* \end{pmatrix}\right\} n \times J, \quad |\Delta^s| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |{}_i\delta^s|$$

и

$$\left\|U^k - U^*\right\|_{l^2}^2 \triangleq h \sum_{j=0}^{J-1} \left(\left[U_j^k - U^*\right], \left[U_j^k - U^*\right]\right), \quad k \in \{0, 1, \cdots\}.$$

Определение 2 (Дискретная функция Ляпунова). Говорят, что функция $L : \mathrm{R}^{n\times J} \to \mathrm{R}_0^+$ является дискретной функцией Ляпунова для начально-краевой разностной задачи (14), если

1. существуют положительные константы $\chi_1 > 0$ и $\chi_2 > 0$ такие, что для всех $k \in \{0, 1, \cdots\}$:
$$\chi_1 \left\|U^k - U^*\right\|_{l^2}^2 \leqslant L\left(U^k\right) \leqslant \chi_2 \left\|U^k - U^*\right\|_{l^2}^2; \tag{16}$$
2. существуют положительные константы $\eta > 0$ и $\nu > 0$ такие, что для всех $k \in \{0, 1, \cdots\}$:
$$\frac{L\left(U^{k+1}\right) - L\left(U^k\right)}{\Delta t} \leqslant -\eta L\left(U^k\right) + \nu\left(\Delta^k, \Delta^k\right).$$

Для упрощения обозначений в дальнейшем мы будем определять последовательность дискретных значений L^k как

$$\mathrm{L}^k = L\left(U^k\right), \quad k \in \{0, 1, \cdots\},$$

и где U^k заданное решение начально-краевой разностной задачи (14).

Теорема 1. (Дискретная устойчивость для случая $U^* \geqslant 0$). Предположим, что условие КФЛ (13) выполнено. Пусть $\Xi \geqslant 0$. Для каждого U^* удовлетворяющего матричному неравенству $U^* \geqslant 0$, каждого R удовлетворяющего матричному неравенству

$0 \leqslant R < E$, каждого $U > 0$ и для любой начальной вектор функции Φ удовлетворяющих матричному неравенству с $U^0 \geqslant 0$, и

$$\|\Phi - U^*\|_{l^2} < \mathrm{U} \tag{17}$$

решение U^k начально-краевой разностной задачи (14) удовлетворяет матричным неравенствам $U^k \geqslant 0, \quad k \in \{0, 1, \cdots\}$, а стационарное состояние U^* начально-краевой разностной задачи (14) является устойчивым в l^2-норме относительно любой дискретной функции возмущения $\Delta^k, \ k \in \{0, 1, \cdots\}$, такой что справедливо матричное неравенство $\Delta^k \leqslant \Xi$.

Для анализа устойчивости начально-краевой разностной задачи (14) дискретным методом Ляпунова воспользуемся следующим преобразованием

$$\begin{gathered} \tilde{U}_j^k = U_j^k - U^*, \ \ \tilde{A}^k = h \textstyle\sum_{j=0}^{J-1} \tilde{U}_j^k, \ \ \tilde{\mathrm{M}}_{\tilde{A}^k}^k = \mathrm{M}\left(U^* + \tilde{A}^k\right), \ \ \tilde{\Lambda}^k = \frac{\tau}{h}\tilde{\mathrm{M}}_{\tilde{A}^k}^k, \ \ k \in \{0, 1, \cdots\}, \\ \mathrm{M}\left(U^* + \tilde{A}^k\right) \equiv diag\left(\tfrac{{}_1P}{{}_1Q + {}_1u^* + {}_1a^k}, \tfrac{{}_2P}{{}_2Q + {}_2u^* + {}_2a^k}, \cdots, \tfrac{{}_nP}{{}_nQ + {}_nu^* + {}_na^k}\right). \end{gathered} \tag{18}$$

Для простоты мы опускаем символ «$\sim$» в обозначениях (18) и дискретизируем систему (10) следующим образом

$$\begin{cases} U_j^{k+1} = \left(1 - \Lambda^k\right) U_j^k + \Lambda^k U_{j+1}^k, \quad j = \overline{0, J-1}; \ \ k \in \{0, 1, \cdots\}; \\ U_J^{k+1} = RU_0^{k+1} + (E - R)\,\Theta A^{k+1} + R\Delta^{k+1}, \quad k \in \{0, 1, \cdots\}; \\ c\,\Theta = diag\left(\frac{{}_1u^*}{{}_1Q + {}_1u^*}, \frac{{}_2u^*}{{}_2Q + {}_2u^*}, \cdots, \frac{{}_nu^*}{{}_nQ + {}_nu^*}\right); \\ A^k = h \sum\limits_{j=0}^{J-1} U_j^k, \ \ \mathrm{M}_{A^k}^k = \mathrm{M}\left(U^* + A^k\right), \ \ \Lambda^k = \frac{\tau}{h}\mathrm{M}_{A^k}^k, \ \ k = \{0, 1, \cdots\}; \\ M\left(U^* + A^k\right) \equiv diag\left(\frac{{}_1P}{{}_1Q + {}_1u^* + {}_1a^k}, \frac{{}_2P}{{}_2Q + {}_2u^* + {}_2a^k}, \cdots, \frac{{}_nP}{{}_nQ + {}_nu^* + {}_na^k}\right); \\ {}_ia^k = h \sum\limits_{j=0}^{J-1} {}_iu_j^k \geqslant -{}_iu^*, \qquad i = \overline{1, n}, \quad k \in \{0, 1, \cdots\}; \\ U_j^0 = \Phi\left(x_j\right), \qquad j = \overline{0, J.} \end{cases} \tag{19}$$

Таким образом, предположение в виде выполнения неравенства (17) в теореме 1 теперь выражается как

$$\|\Phi\|_{l^2} < \mathrm{U}. \tag{20}$$

Заметим, что неравенство (49) перепишется в виде

$$\left\|U^k\right\|_{l^2} \leqslant \zeta_2 e^{-\zeta_1 t^k} \|\Phi\|_{l^2} + \zeta_3 \max_{0 \leqslant s < k}\left(|\Delta^s|\right), \quad k \in \{1, 2, \cdots\},$$

Доказательство теоремы 1. Далее в процессе доказательства теоремы 1 мы рассматриваем только случай выполнения матричного неравенства

$$U^* > 0. \tag{21}$$

Поскольку начальные данные $U^0 \geqslant 0$, тогда согласно дискретной системе (19) и условию CFL в уравнении (13), имеем $U^k \geqslant 0, \ \ k \in \{0, 1, \cdots\}$.

Рассмотрим следующего кандидата для дискретной функции Ляпунова для любого $\boldsymbol{\varphi} \in R^{n\times J}$

$$L(\boldsymbol{\varphi}) = h\sum_{j=1}^{J}(\varphi_j,\varphi_j)^2 e^{\alpha x_j} + \left(h\sum_{j=0}^{J-1}B\varphi_j, h\sum_{j=0}^{J-1}\varphi_j\right),$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix}\varphi_0\\ \varphi_1\\ \dots\\ \varphi_{J-1}\end{pmatrix},\ \ \varphi_j = \begin{pmatrix}{}_1\varphi_j\\ {}_2\varphi_j\\ \dots\\ {}_n\varphi_j\end{pmatrix},\ \ j=\overline{0,J-1}.$$

где $\alpha > 0$. В частности, в качестве значение параметра B берём следующее

$$B = \Theta(E-R)^{-1}\left(e^{\alpha}R\left[1+\alpha^2\right]-E\right) < 0 \tag{22}$$

и, поскольку $\Theta \leqslant 1$, существует достаточно малое α^*, такое что $-\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} < B < 0$ (см. [2]).

Согласно (13), значения L на решении U^k в момент времени t^k для $k \geqslant 0$ определяются выражением

$$\mathrm{L}^k = \left\|U^k\right\|_{\alpha}^2 + \left(BA^k, A^k\right),\ \ k\in\{0,1,\cdots\}, \tag{23}$$

$$\left\|U^k\right\|_{\alpha}^2 = h\sum_{j=0}^{J-1}\left(U_j^k, U_j^k\right)e^{\alpha x_j}.$$

При фиксированной R удовлетворяющей матричному неравенству $0 \leqslant R < E$ полагаем, что существует такое α^{**}, что при $0<\alpha<\alpha^{**}$ выполняются неравенства

$$\frac{\exp(-\alpha)}{(1+\alpha^2)} > R > R^2 \text{ и } \alpha < E - R, \tag{24}$$

и что

$$0 < h < 1.$$

В качестве первого шага докажем, что L^k эквивалентно $\left\|U^k\right\|_{\alpha}^2$. Эта часть не зависит от граничного условия U_J^{k+1}.

Согласно разложения Тейлора справедливы следующая цепочка неравенств

$$\frac{h\left(e^{-\alpha}-1\right)}{e^{-\alpha h}-1} \leqslant (1+\alpha)^2 \leqslant (1+3\alpha).$$

Следовательно, для всех $k \geqslant 1$

$$\begin{gathered}\left(A^k,A^k\right) = \left(h\textstyle\sum_{j=1}^{J}U_j^k, h\sum_{j=1}^{J}U_j^k\right) \leqslant h^2\sum_{j=0}^{J-1}e^{\alpha x_j}\left(U_j^k,U_j^k\right)\sum_{j=0}^{J-1}e^{-\alpha x_j} = \\ \frac{h\left(e^{-\alpha}-1\right)}{e^{-\alpha h}-1}\left\|U^k\right\|_{\alpha}^2 \leqslant (1+\alpha)^2\left\|U^k\right\|_{\alpha}^2 \leqslant (1+3\alpha)\left\|U^k\right\|_{\alpha}^2.\end{gathered} \tag{25}$$

В силу ограничений на B получаем оценку на L^k для всех $k \geqslant 0$

$$\begin{gathered}\left\|U^k\right\|_{\alpha}^2 \geqslant \mathrm{L}^k \geqslant \frac{h\left(e^{-\alpha}-1\right)}{\left(e^{-\alpha h}-1\right)}h\textstyle\sum_{j=0}^{J-1}\left(\left\{E+\Theta\left[E-R\right]^{-1}\left[e^{\alpha}R\left(1+\alpha^2\right)-E\right]\right\}U_j^k,U_j^k\right)e^{\alpha x_j} \geqslant \\ h\textstyle\sum_{j=0}^{J-1}\left(\left\{E-(1+3\alpha)\Theta\right\}U_j^k,U_j^k\right)e^{\alpha x_j} \geqslant \frac{1}{2}h\sum_{j=0}^{J-1}\left(\left[E-\Theta\right]U_j^k,U_j^k\right)e^{\alpha x_j},\end{gathered} \tag{26}$$

где последнее неравенство верно при условии, что

$$0<\alpha\leqslant \min\left\{1,\alpha^{*},\alpha^{**},\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1-\lambda_i\left(\Theta\right)}{6\lambda_i\left(\Theta\right)}\right\}. \tag{27}$$

Здесь $\lambda_i\left(\Theta\right),\ \ i=\overline{1,n}$- собственные значения матрицы Θ.

Кроме того, дискретная весовая норма эквивалентна l^2-норме, для всех $k\geqslant 0$

$$\left\|U^k\right\|_{l^2}^2\leqslant \left\|U^k\right\|_{\alpha}^2\leqslant e^{\alpha}\left\|U^k\right\|_{l^2}^2. \tag{28}$$

В качестве второго шага мы оцениваем конечно-разностную аппроксимацию временной производной от L^k по времени.

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{L}^{k+1}-\mathrm{L}^k}{\tau}=\frac{h}{\tau}\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(U_j^{k+1},U_j^{k+1}\right)-\left(U_j^k,U_j^k\right)\right]e^{\alpha x_j}+\\ \frac{h^2}{\tau}\left[\left(\sum_{j=0}^{J-1}BU_j^{k+1},\sum_{j=0}^{J-1}U_j^{k+1}\right)-\left(\sum_{j=0}^{J-1}BU_j^{k},\sum_{j=0}^{J-1}U_j^{k}\right)\right]=\\ \frac{1}{\tau}L_1^k+\frac{1}{\tau}L_2^k,\end{gathered} \tag{29}$$

где

$$L_1^k=h\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(U_j^{k+1},U_j^{k+1}\right)-\left(U_j^k,U_j^k\right)\right]e^{\alpha x_j},$$

$$L_2^k=h^2\left[\left(\sum_{j=0}^{J-1}BU_j^{k+1},\sum_{j=0}^{J-1}U_j^{k+1}\right)-\left(\sum_{j=0}^{J-1}BU_j^{k},\sum_{j=0}^{J-1}U_j^{k}\right)\right].$$

Согласно неравенство Йенсена для выпуклых отображений $y\to y^2$справедливо неравенство

$$\left[q_1y_1+q_2y_2\right]^2\leqslant q_1\left(y_1\right)^2+q_2\left(y_2\right)^2,$$

где $q_1,\,q_2>0$ 8 $\;q_1+q_2=1$.

Используем дискретную схему (19), условие КФЛ (13), обеспечивающее $0<\Lambda^k\leqslant E$ и выпуклость отображения $y\to y^2$, чтобы оценить квадратичную форму $\left(U_j^{k+1},U_j^{k+1}\right)$ для всех $j\in\{0,\cdots,J-1\}$ и $k\geqslant 0$

$$\begin{gathered}\left(U_j^{k+1},U_j^{k+1}\right)=\left(\left\{\left[1-\Lambda^k\right]U_j^k+\Lambda^kU_{j+1}^k\right\},\left\{\left[1-\Lambda^k\right]U_j^k+\Lambda^kU_{j+1}^k\right\}\right)\leqslant\\ \left(\left[1-\Lambda^k\right]U_j^k,U_j^k\right)+\left(\Lambda^kU_{j+1}^k,U_{j+1}^k\right).\end{gathered} \tag{30}$$

Величину L_1^k оценим сверху с помощью следующей ниже леммой 1 и величину L_2^k преобразуем с помощью следующей ниже леммой 2. Тогда имеем

Лемма 1. На решениях начально-краевой разностной задачи (19) справедливо неравенство

$$L_1^k\leqslant h\left(e^{-\alpha h}-1\right)\sum_{j=0}^{J-1}\left(\Lambda^kU_j^k,U_j^k\right)e^{\alpha x_j}+he^{-\alpha h}\left[e^{\alpha}\left(\Lambda^kU_J^k,U_J^k\right)-\left(\Lambda^kU_0^k,U_0^k\right)\right]. \tag{31}$$

Доказательство. Используя неравенство (30) оценим сверху величину $\left(U_j^{k+1},U_j^{k+1}\right)$ в левой части неравенство (31)

$$\begin{gathered}L_1^k=h\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(U_j^{k+1},U_j^{k+1}\right)-\left(U_j^k,U_j^k\right)\right]e^{\alpha x_j}\leqslant\\ h\sum_{j=0}^{J-1}\left\{\left(\left[1-\Lambda^k\right]U_j^k,U_j^k\right)+\left(\Lambda^kU_{j+1}^k,U_{j+1}^k\right)-\left(U_j^k,U_j^k\right)\right\}e^{\alpha x_j}=\\ h\sum_{j=0}^{J-1}\left\{\left(\Lambda^kU_{j+1}^k,U_{j+1}^k\right)-\left(\Lambda^kU_j^k,U_j^k\right)\right\}e^{\alpha x_j}.\end{gathered} \tag{32}$$

Преобразуем правую часть неравенство (33) с помощью следующей общеизвестной формулы разностного дифференцирования по частям для любой сеточной функции v_i

$$\{v_{j+1}-v_j\}\,e^{\alpha x_j}=\left(v_{j+1}e^{\alpha x_{j+1}}-v_je^{\alpha x_j}\right)+v_{j+1}e^{\alpha x_{j+1}}\left(e^{-\alpha h}-1\right) \tag{33}$$

в справедливости которой можно убедится непосредственной проверкой

$$\begin{aligned}\{v_{j+1}-v_j\}\,e^{\alpha x_j}&=v_{j+1}e^{\alpha x_{j+1}}-v_je^{\alpha x_j}-v_{j+1}e^{\alpha x_{j+1}}+v_{j+1}e^{\alpha x_j}\\&=\left(v_{j+1}e^{\alpha x_{j+1}}-v_je^{\alpha x_j}\right)+v_{j+1}e^{\alpha x_{j+1}}\left(e^{-\alpha h}-1\right).\end{aligned} \tag{34}$$

Применим формулу разностного дифференцирования (33) в правой части неравенства (32), полагая $v_j\triangleq\left(\Lambda^kU_j^k,U_j^k\right)$

$$\begin{gathered}h\textstyle\sum_{j=0}^{J-1}\left\{\left(\Lambda^kU_{j+1}^k,U_{j+1}^k\right)-\left(\Lambda^kU_j^k,U_j^k\right)\right\}e^{\alpha x_j}=\\ h\textstyle\sum_{j=0}^{J-1}\left[\begin{array}{l}\left(\Lambda^kU_{j+1}^k,U_{j+1}^k\right)e^{\alpha x_{j+1}}-\\ \left(\Lambda^kU_j^k,U_j^k\right)e^{\alpha x_j}\end{array}\right]+h\left(e^{-\alpha h}-1\right)\textstyle\sum_{j=0}^{J-1}\left(\Lambda^kU_{j+1}^k,U_{j+1}^k\right)e^{\alpha x_{j+1}}.\end{gathered} \tag{35}$$

Для вычисления первой суммы в правой части неравенства (35) применим следующую формулу суммирования

$$\sum_{j=0}^{J-1}(w_{j+1}-w_j)=w_J-w_0. \tag{36}$$

В тождестве (36) положим $w_j=h\left(\Lambda^kU_j^k,U_j^k\right)e^{\alpha x_j}$ и получим

$$\begin{gathered}h\textstyle\sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(\Lambda^kU_{j+1}^k,U_{j+1}^k\right)e^{\alpha x_{j+1}}-\left(\Lambda^kU_j^k,U_j^k\right)e^{\alpha x_j}\right]=\\=h\left[e^{\alpha}\left(\Lambda^kU_J^k,U_J^k\right)-\left(\Lambda^kU_0^k,U_0^k\right)\right].\end{gathered}$$

Тогда равенства (35) примет вид

$$\begin{gathered}h\textstyle\sum_{j=0}^{J-1}\left\{\left(\Lambda^kU_{j+1}^k,U_{j+1}^k\right)-\left(\Lambda^kU_j^k,U_j^k\right)\right\}e^{\alpha x_j}=\\=h\left(e^{-\alpha h}-1\right)\textstyle\sum_{j=0}^{J-1}\left(\Lambda^kU_{j+1}^k,U_{j+1}^k\right)e^{\alpha x_{j+1}}+h\left[e^{\alpha}\left(\Lambda^kU_J^k,U_J^k\right)-\left(\Lambda^kU_0^k,U_0^k\right)\right].\end{gathered} \tag{37}$$

С целью образования $\left\|U^k\right\|_\alpha^2=h\sum_{j=0}^{J-1}\left(U_j^k,U_j^k\right)e^{\alpha x_j}$ в правой части неравенства (37) воспользуемся следующей формулой сдвига назад индекса в сумме

$$\sum_{j=0}^{J-1}\left(\Lambda^kU_{j+1}^k,U_{j+1}^k\right)e^{\alpha x_{j+1}}=\sum_{j=0}^{J-1}\left(\Lambda^kU_j^k,U_j^k\right)e^{\alpha x_j}+e^{\alpha}\left(\Lambda^kU_J^k,U_J^k\right)-\left(\Lambda^kU_0^k,U_0^k\right).$$

Тогда равенство (37) преобразуется так:

$$\begin{gathered}h\textstyle\sum_{j=0}^{J-1}\left\{\left(\Lambda^kU_{j+1}^k,U_{j+1}^k\right)-\left(\Lambda^kU_j^k,U_j^k\right)\right\}e^{\alpha x_j}=h\left(e^{-\alpha h}-1\right)\textstyle\sum_{j=0}^{J-1}\left(\Lambda^kU_j^k,U_j^k\right)e^{\alpha x_j}+\\ h\left(e^{-\alpha h}-1\right)\left[e^{\alpha}\left(\Lambda^kU_J^k,U_J^k\right)-\left(\Lambda^kU_0^k,U_0^k\right)\right]+\\ h\left[e^{\alpha}\left(\Lambda^kU_J^k,U_J^k\right)-\left(\Lambda^kU_0^k,U_0^k\right)\right].\end{gathered} \tag{38}$$

Или упрощая правую часть имеем неравенство (31).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. На решениях начально-краевой разностной задачи (19) справедливо неравенство

$$L_2^k = \left(B\left[A^k + h\Lambda^k\left(U_J^k - U_0^k\right)\right], \left[A^k + h\Lambda^k\left(U_J^k - U_0^k\right)\right]\right) - \left(BA^k, A^k\right). \qquad (39)$$

Доказательство. Согласно начально-краевой разностной задачи (19) имеем

$$L_2^k = h^2\left\{\begin{array}{l} \left(\sum_{j=0}^{J-1} B\left[\left(1-\Lambda^k\right)U_j^k + \Lambda^k U_{j+1}^k\right], \sum_{j=0}^{J-1}\left[\left(1-\Lambda^k\right)U_j^k + \Lambda^k U_{j+1}^k\right]\right) - \\ \left(\sum_{j=0}^{J-1} BU_j^k, \sum_{j=0}^{J-1} U_j^k\right) \end{array}\right\} =$$

$$= h^2\left\{\begin{array}{l} \left(B\sum_{j=0}^{J-1}\left[U_j^k + \Lambda^k\left(U_{j+1}^k - U_j^k\right)\right], \sum_{j=0}^{J-1}\left[U_j^k + \Lambda^k\left(U_{j+1}^k - U_j^k\right)\right]\right) - \\ \left(\sum_{j=0}^{J-1} BU_j^k, \sum_{j=0}^{J-1} U_j^k\right) \end{array}\right\}.$$

Используя формулу (36), получим

$$\sum_{j=0}^{J-1}\left(U_{j+1}^k - U_j^k\right) = U_J^k - U_0^k.$$

Следовательно

$$L_2^k = h^2\left\{\begin{array}{l} \left(B\left[\sum_{j=0}^{J-1} U_j^k + \Lambda^k\left(U_J^k - U_0^k\right)\right], \left[\sum_{j=0}^{J-1} U_j^k + \Lambda^k\left(U_J^k - U_0^k\right)\right]\right) - \\ \left(\sum_{j=0}^{J-1} BU_j^k, \sum_{j=0}^{J-1} U_j^k\right) \end{array}\right\}.$$

С учётом формулы (11), отсюда следует доказательство **леммы 2**.

Лемма 3. Пусть выполняется условие КФЛ (13). Тогда на решениях начально-краевой разностной задачи (19) для конечно-разностной аппроксимации временной производной от L^k (дискретная функция Ляпунова) по времени справедливо неравенство

$$\frac{\mathrm{L}^{k+1} - \mathrm{L}^k}{\tau} \leqslant \left(e^{-\alpha h} - 1\right)\sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathrm{M}U_j^k, U_j^k\right)e^{\alpha x_j} + B_1^k, \qquad (40)$$

где

$$B_1^k = e^{-\alpha h}\left[e^{\alpha}\left(\mathrm{M}U_J^k, U_J^k\right) - \left(\mathrm{M}U_0^k, U_0^k\right)\right] +$$

$$+\tfrac{1}{\tau}\left\{\left(B\left[A^k + h\Lambda^k\left(U_J^k - U_0^k\right)\right], \left[A^k + h\Lambda^k\left(U_J^k - U_0^k\right)\right]\right) - \left(BA^k, A^k\right)\right\}.$$

Доказательство. Конечно-разностную аппроксимация временной производной от L по времени вычисляется с помощью формулы (29):

$$\frac{\mathrm{L}^{k+1} - \mathrm{L}^k}{\tau} = \frac{1}{\tau}L_1^k + \frac{1}{\tau}L_2^k.$$

Величину L_1^k оценим сверху с помощью неравенства (31) леммы 1 и величину L_2^k преобразуем с помощью равенства (39) леммы 2. Тогда имеем

$$\tfrac{\mathrm{L}^{k+1}-\mathrm{L}^k}{\tau} = \tfrac{1}{\tau}L_1^k + \tfrac{1}{\tau}L_2^k \leqslant$$

$$\tfrac{1}{\tau}\left\{h\left(e^{-\alpha h} - 1\right)\sum_{j=0}^{J-1}\left(\Lambda^k U_j^k, U_j^k\right)e^{\alpha x_j} + he^{-\alpha h}\left[e^{\alpha}\left(\Lambda^k U_J^k, U_J^k\right) - \left(\Lambda^k U_0^k, U_0^k\right)\right]\right\} +$$

$$+\tfrac{1}{\tau}\left\{\left(B\left[A^k + h\Lambda^k\left(U_J^k - U_0^k\right)\right], \left[A^k + h\Lambda^k\left(U_J^k - U_0^k\right)\right]\right) - \left(BA^k, A^k\right)\right\} =$$

$$= \left(e^{-\alpha h} - 1\right)\sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathrm{M}U_j^k, U_j^k\right)e^{\alpha x_j} + B_1^k,$$

Лемма 3 доказана.

Разделим граничное условие при $x = 1$ как

$$U_J^{k+1} = \hat{U}_J^{k+1} + R\Delta^{k+1},\ \ \hat{U}_J^{k+1} = RU_0^{k+1} + (E-R)\,\Theta A^{k+1} \tag{41}$$

и получим

$$\begin{gathered} B_1^k = e^{-\alpha h}\left[e^{\alpha}\left(\mathrm{M}U_J^k, U_J^k\right) - \left(\mathrm{M}U_0^k, U_0^k\right)\right] + \\ \tfrac{1}{\tau}\left\{\left(B\left[A^k + h\Lambda^k\left(U_J^k - U_0^k\right)\right], \left[A^k + h\Lambda^k\left(U_J^k - U_0^k\right)\right]\right) - \left(BA^k, A^k\right)\right\} = \\ e^{-\alpha h}\left\{e^{\alpha}\left(\mathrm{M}\left[\hat{U}_J^k + R\Delta^k\right], \left[\hat{U}_J^k + R\Delta^k\right]\right) - \left(\mathrm{M}U_0^k, U_0^k\right)\right\} + \\ \left\{\begin{array}{l} \tau\left(B\mathrm{M}^k\left[\hat{U}_J^k + R\Delta^k - U_0^k\right], \mathrm{M}^k\left[\hat{U}_J^k + R\Delta^k - U_0^k\right]\right) + \\ 2\left(BA^k, \mathrm{M}^k\left[\hat{U}_J^k + R\Delta^k - U_0^k\right]\right) \end{array}\right\}. \end{gathered} \tag{42}$$

Как и в непрерывном случае оценим

$$\begin{gathered} \left(\mathrm{M}\left[\hat{U}_J^k + R\Delta^k\right], \left[\hat{U}_J^k + R\Delta^k\right]\right) \leqslant \\ (1+\alpha^2)\left(\mathrm{M}\hat{U}_J^k, \hat{U}_J^k\right) + \left(1 + \tfrac{1}{\alpha^2}\right)\left(\mathrm{M}R\Delta^k, R\Delta^k\right) \end{gathered} \tag{43}$$

Аналогичным образом оценим выражения $2\left(A^k, \mathrm{M}^k R\Delta^k\right)$ и $\left(\mathrm{M}^k\left\{\left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right] + R\Delta^k\right\}, \mathrm{M}^k\left\{\left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right] + R\Delta^k\right\}\right)$ соответственно

$$1)\ \ 2\left(A^k, \mathrm{M}R\Delta^k\right) \leqslant \alpha^2\left(A^k, \mathrm{M}^k A^k\right) + \frac{1}{\alpha^2}\left(R\Delta^k, \mathrm{M}^k R\Delta^k\right),$$

$$\begin{gathered} 2)\ \ \left(M^k\left\{\left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right] + R\Delta^k\right\}, \mathrm{M}^k\left\{\left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right] + R\Delta^k\right\}\right) \leqslant \\ (1+\alpha^2)\left(\mathrm{M}^k\left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right], \mathrm{M}^k\left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right]\right) + \left(1 + \tfrac{1}{\alpha^2}\right)\left(\mathrm{M}^k R\Delta^k, \mathrm{M}^k R\Delta^k\right). \end{gathered}$$

Тогда из (42) получим

$$\begin{gathered} B_1^k \leqslant e^{-\alpha h}\left\{\begin{array}{l} e^{\alpha}\left\langle(1+\alpha^2)\left(\mathrm{M}\hat{U}_J^k, \hat{U}_J^k\right) + \left(1 + \tfrac{1}{\alpha^2}\right)\left(\mathrm{M}R\Delta^k, R\Delta^k\right)\right\rangle - \\ \left(\mathrm{M}U_0^k, U_0^k\right) \end{array}\right\} + \\ \tau\left\{\begin{array}{l} \left(\left[B + \alpha^2\left|B\right|\right]\mathrm{M}^k\left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right], \mathrm{M}^k\left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right]\right) + \\ \left(\left[B + \tfrac{1}{\alpha^2}\left|B\right|\right]\mathrm{M}^k R\Delta^k, \mathrm{M}^k R\Delta^k\right) \end{array}\right\} + \\ +\left\{\alpha^2\left(\left|B\right| A^k, \mathrm{M}^k A^k\right) + \tfrac{1}{\alpha^2}\left(\left|B\right| R\Delta^k, \mathrm{M}^k R\Delta^k\right)\right\} + 2\left(BA^k, \mathrm{M}^k\left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right]\right) \end{gathered} \tag{44}$$

Следовательно, отсюда получим оценку

$$B_1^k \leqslant B_2^k + B_3^k + B_4^k. \tag{45}$$

Здесь

$$\begin{gathered} B_2^k = e^{-\alpha h}\left[e^{\alpha}\left(\mathrm{M}\hat{U}_J^k, \hat{U}_J^k\right) - \left(\mathrm{M}U_0^k, U_0^k\right)\right] + \ 2\left(BA^k, \mathrm{M}^k\left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right]\right) + \\ \tau\left(B\mathrm{M}^k\left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right], \mathrm{M}^k\left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right]\right); \end{gathered}$$

$$B_3^k = e^{\alpha(1-h)}\alpha^2 \left(\mathrm{M}\hat{U}_J^k, \hat{U}_J^k\right) + \tau\alpha^2 \left(|B|\, \mathrm{M}^k \left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right], \mathrm{M}^k \left[\hat{U}_J^k - \bar{\bar{U}}_0^k\right]\right) +$$
$$\alpha^2 \left(|B|\, A^k, \mathrm{M}^k A^k\right);$$
$$B_4^k = e^{\alpha(1-h)} \left(1 + \tfrac{1}{\alpha^2}\right) \left(\mathrm{M}R\Delta^k, R\Delta^k\right) + \tau \left(\left[B + \tfrac{1}{\alpha^2}\, |B|\right] \mathrm{M}^k R\Delta^k, \mathrm{M}^k R\Delta^k\right) +$$
$$\tfrac{1}{\alpha^2} \left(|B|\, R\Delta^k, \mathrm{M}^k R\Delta^k\right).$$

Из граничных условий (41) с учётом неравенство Йенсена для выпуклых отображений получим следующие неравенство и равенство

$$\left(\hat{U}_J^{k+1}, \hat{U}_J^{k+1}\right) \leqslant \left(RU_0^{k+1}, U_0^{k+1}\right) + \left([E - R]\, \Theta A^{k+1}, \Theta A^{k+1}\right),$$
$$\hat{U}_J^{k+1} - U_0^{k+1} = (R - E)\, U_0^{k+1} + (E - R)\, \Theta A^{k+1}.$$

С учётом этих соотношений граничных условий для выражения B_2^k получим следующее неравенство

$$B_2^k \leqslant e^{-\alpha h} \left\{\left(\mathrm{M}\left[e^\alpha R - E\right] U_0^{k+1}, U_0^{k+1}\right) + e^\alpha \left(\mathrm{M}\left[E - R\right] \Theta A^{k+1}, \Theta A^{k+1}\right)\right\} +$$
$$-2 \left(BA^k, \mathrm{M}^k \left[E - R\right] \left[U_0^{k+1} - \Theta A^{k+1}\right]\right) + \tau \left(B\mathrm{M}^k \left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right], \mathrm{M}^k \left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right]\right).$$

Заметим, что $\left(B\mathrm{M}^k \left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right], \mathrm{M}^k \left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right]\right) \leqslant 0$. Следовательно для выражения B_2^k получим следующее неравенство

$$B_2^k \leqslant e^{-\alpha h} \left\{\left(\mathrm{M}\left[e^\alpha R - E\right] U_0^{k+1}, U_0^{k+1}\right) + e^\alpha \left(\mathrm{M}\left[E - R\right] \Theta A^{k+1}, \Theta A^{k+1}\right)\right\} +$$
$$-2 \left(BA^k, \mathrm{M}^k \left[E - R\right] \left[U_0^{k+1} - \Theta A^{k+1}\right]\right).$$

Подставляя значение B из выражения (22) для выражения B_2^k получим следующее неравенство

$$B_2^k \leqslant e^{-\alpha h} \left\{\left(\mathrm{M}\left[e^\alpha R - E\right] U_0^{k+1}, U_0^{k+1}\right) + e^\alpha \left(\mathrm{M}\left[E - R\right] \Theta A^{k+1}, \Theta A^{k+1}\right)\right\} +$$
$$-2 \left(BA^k, \mathrm{M}^k \left[E - R\right] \left[U_0^{k+1} - \Theta A^{k+1}\right]\right);$$
$$B_2^k \leqslant e^{-\alpha h} \left\{\left(\mathrm{M}\left[e^\alpha R - E\right] U_0^{k+1}, U_0^{k+1}\right) + e^\alpha \left(\mathrm{M}\left[E - R\right] \Theta A^{k+1}, \Theta A^{k+1}\right)\right\} +$$
$$-2 \left(\Theta \left(e^\alpha R \left[1 + \alpha^2\right] - E\right) A^k, \mathrm{M}^k \left[U_0^{k+1} - \Theta A^{k+1}\right]\right).$$

Тогда правую часть вышеприведённого последнего неравенства для выражения B_2^k разобъём на две части:

$$B_2^k \leqslant e^{-\alpha h} \left\{\left(\mathrm{M}\left[e^\alpha R - E\right] U_0^{k+1}, U_0^{k+1}\right) + e^\alpha \left(\mathrm{M}\left[E - R\right] \Theta A^{k+1}, \Theta A^{k+1}\right)\right\} + \tilde{B}_3^k -$$
$$2 \left(\Theta \left(e^\alpha R - E\right) A^k, \mathrm{M}^k \left[U_0^{k+1} - \Theta A^{k+1}\right]\right),$$

где $\tilde{B}_3^k = -2 \left(\Theta e^\alpha R\alpha^2 A^k, \mathrm{M}^k \left[U_0^{k+1} - \Theta A^{k+1}\right]\right)$.

Правую часть последнего неравенство для выражения B_2^k преобразуем следующим образом

$$B_2^k \leqslant \tilde{B}_3^k + e^{-\alpha h} \left(\mathrm{M}\left[e^\alpha R - E\right] \left[U_0^k - e^{\alpha h}\Theta A^k\right], \left[U_0^k - e^{\alpha h}\Theta A^k\right]\right) +$$
$$e^{\alpha(1-h)} \left(\mathrm{M}\left[E - R\right] \Theta A^k, \Theta A^k\right) - e^{\alpha h} \left(\mathrm{M}\left[e^\alpha R - E\right] \Theta A^k, \Theta A^k\right) +$$
$$2 \left(\left(e^\alpha R - E\right) \Theta A^k, \mathrm{M}^k \Theta A^k\right).$$

Для фиксированного R выбираем α таким образом, что $e^{\alpha}R - E \leqslant 0$. Тогда $e^{-\alpha h}\left(\mathrm{M}\left[e^{\alpha}R - E\right]\left[U_0^k - e^{\alpha h}\Theta A^k\right],\ \left[U_0^k - e^{\alpha h}\Theta A^k\right]\right) \leqslant 0$ и следовательно усиливая неравенство для выражения B_2^k получим

$$B_2^k \leqslant \tilde{B}_3^k + \tilde{B}_2^k.$$

Здесь $\tilde{B}_2^k = \left(\left\{e^{\alpha(1-h)}\left[E - R\right] + \left(2 - e^{\alpha h}\right)\left[e^{\alpha}R - E\right]\right\}\Theta A^k, \mathrm{M}^k\Theta A^k\right)$.
Таким образом, сверху оценив выражение B_2^k из (45) получим

$$B_1^k \leqslant \tilde{B}_2^k + \tilde{B}_3^k + B_3^k + B_4^k. \tag{46}$$

Далее оцениваем $\tilde{B}_3^k + B_3^k$ и B_4^k . Здесь мы используем, что B, определяемые (22), M, ограничены через

$$|B| \leqslant \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} \leqslant 1,\ \ \mathrm{M} \leqslant diag\left(\frac{{}_1P}{{}_1Q}, \frac{{}_2P}{{}_2Q}, \cdots, \frac{{}_mP}{{}_mQ}\right),\ \text{ и } \Lambda^k \leqslant E,$$

соответственно, и что Λ^k, h и Θ все ограничены сверху единицей.

Дополнительно, согласно (48) мы имеем ограничение на $\left(A^k, A^k\right)$ и согласно (27) $0 < \alpha \leqslant 1$, так что

$$\left(\hat{U}_J^k, \hat{U}_J^k\right) \leqslant 2\left(U_0^k, U_0^k\right) + 2\left(A^k, A^k\right) \leqslant \left(2 + 2\left(1 + 3\right)\right)\left\|U^k\right\|_{\alpha}^2 = 10\left\|U^k\right\|_{\alpha}^2$$

и

$$\left(\left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right], \left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right]\right) \leqslant 2\left(\hat{U}_J^k, \hat{U}_J^k\right) + 2\left(U_0^k, U_0^k\right) \leqslant 22\left\|U^k\right\|_{\alpha}^2,$$

так как

$$\left(U_0^k - \Theta A^{k+1}\right) = \left(R - E\right)^{-1}\left(\hat{U}_J^{k+1} - U_0^{k+1}\right).$$

Тогда для выражения $\tilde{B}_3^k$ получим следующее неравенство

$$\tilde{B}_3^k = -2\left(\Theta e^{\alpha}R\alpha^2 A^k, \mathrm{M}^k\left[R - E\right]^{-1}\left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right]\right) =$$
$$2\left(\Theta e^{\alpha}R\alpha^2 A^k, \mathrm{M}^k\left[E - R\right]^{-1}\left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right]\right) \leqslant$$
$$\left(\Theta e^{\alpha}R\alpha^2\mathrm{M}^k\left[E - R\right]^{-1}\left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right], \left[\hat{U}_J^k - U_0^k\right]\right) +$$
$$\left(\Theta e^{\alpha}R\alpha^2\mathrm{M}^k\left[E - R\right]^{-1}A^k, A^k\right) \leqslant \alpha^2 Ch\textstyle\sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathrm{M}U_j^k, U_j^k\right)e^{\alpha x_j}.$$

Здесь C - некоторое положительное число удовлетворяющее неравенство

$$\Theta e^{\alpha}R\left[E - R\right]^{-1}\left(23 + 3\alpha\right) \leqslant CE.$$

Тогда очевидно, что справедливо неравенство

$$B_3^k + \tilde{B}_3^k \leqslant \alpha^2\tilde{C}h\sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathrm{M}U_j^k, U_j^k\right)e^{\alpha x_j} \text{ и } B_4^k \leqslant e^{\alpha(1-h)}\left(1 + \frac{3}{\alpha^2}\right)\left(\mathrm{M}\Delta^k, \Delta^k\right).$$

Оценка теперь выполняется на $\tilde{B}_2^k$. В силу предыдущих оценок, а также в силу уравнения имеем, для $\tilde{B}_2^k$ получения

$$\tilde{B}_2^k = \left(\left\{e^{\alpha(1-h)}\left[E - R\right] + \left(2 - e^{\alpha h}\right)\left[e^{\alpha}R - E\right]\right\}\Theta A^k, \mathrm{M}^k\Theta A^k\right) \leqslant$$
$$\left(1 + 3\alpha\right)\alpha h\textstyle\sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathrm{M}\Theta U_j^k, \Theta U_j^k\right)e^{\alpha x_j}.$$

Предыдущие оценки позволяют оценить дискретную временную производную от L по времени в неравенстве (40) для $k \geqslant 0$

$$\frac{\mathrm{L}^{k+1}-\mathrm{L}^{k}}{\tau} \leqslant \left(e^{-\alpha h}-1\right) \sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathrm{M} U_{j}^{k}, U_{j}^{k}\right) e^{\alpha x_{j}}+B_{1}^{k} \leqslant$$

$$\left(e^{-\alpha h}-1\right) \sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathrm{M} U_{j}^{k}, U_{j}^{k}\right) e^{\alpha x_{j}}+\tilde{B}_{2}^{k}+\tilde{B}_{3}^{k}+B_{3}^{k}+B_{4}^{k} \leqslant$$

$$\left(e^{-\alpha h}-1\right) \sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathrm{M} U_{j}^{k}, U_{j}^{k}\right) e^{\alpha x_{j}}+(1+3 \alpha) \alpha h \sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathrm{M} \Theta U_{j}^{k}, \Theta U_{j}^{k}\right) e^{\alpha x_{j}}+$$

$$\alpha^{2} \tilde{C} h \sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathrm{M} U_{j}^{k}, U_{j}^{k}\right) e^{\alpha x_{j}}+e^{\alpha(1-h)}\left(1+\frac{3}{\alpha^{2}}\right)\left(\mathrm{M} \Delta^{k}, \Delta^{k}\right) \leqslant (\mathrm{A\,B} > \mathrm{G} => \mathrm{ABLN}\,\alpha^{2})$$

$$-\alpha h \sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathrm{M} U_{j}^{k}, U_{j}^{k}\right) e^{\alpha x_{j}}+\alpha h \sum_{j=0}^{J-1}\left(\mathrm{M} \Theta U_{j}^{k}, \Theta U_{j}^{k}\right) e^{\alpha x_{j}}+\alpha h\left(1+\frac{3}{\alpha^{2}}\right)\left(\mathrm{M} \Delta^{k}, \Delta^{k}\right).$$

Последнее неравенство выполняется при условии, что $0<\alpha$ достаточно мало, так что выполняются (27) и справедливо

$$\alpha \leqslant \frac{1}{7+2 \tilde{C}}\left(E-\Theta^{2}\right). \tag{47}$$

Наконец, осталось показать, что M ограничено снизу строго положительным числом. Это равносильно тому, что мы показываем, что A^{k} ограничено сверху. Заметим, что в силу $h \sum_{j=0}^{J-1}\left(U_{j}^{k}, U_{j}^{k}\right) e^{\alpha x_{j}} \geqslant \mathrm{L}^{k}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{L}^{k+1}-\mathrm{L}^{k}}{\tau} \leqslant -b_{1} \lambda_{\min }(\mathrm{M}) \mathrm{L}^{k}+b_{2} \lambda_{\max }(\mathrm{M})\left(\Delta^{k}, \Delta^{k}\right), \\
&b_{1} \triangleq b_{1}(\alpha)=\alpha \frac{1-\lambda_{\max }\left(\Theta^{2}\right)}{2}, \; b_{2} \triangleq b_{2}(\alpha)=\alpha\left(1+\frac{3}{\alpha^{2}}\right).
\end{aligned} \tag{48}$$

Рекуррентно решая (48), получаем при $\prod_{l=n+1}^{n}(\cdot) \triangleq 1$

$$\begin{gathered}
L^{k+1} \leqslant \prod_{n=0}^{k}\left(1-\tau b_{1} \lambda_{\min }^{n}(\mathrm{M})\right) L^{0}+ \\
+b_{2} \tau \sum_{n=0}^{k} \lambda_{\max }^{n}(\mathrm{M})\left(\Delta^{n}, \Delta^{n}\right) \prod_{m=n+1}^{k}\left(1-\tau b_{1} \lambda_{\min }^{m}(\mathrm{M})\right) \leqslant \\
\leqslant \exp \left(-\tau b_{1} \sum_{n=0}^{k} \lambda_{\min }^{n}(\mathrm{M})\right) L^{0}+ \\
+\max _{0 \leqslant l \leqslant k}\left(\Delta^{l}, \Delta^{l}\right) b_{2} \tau \sum_{n=0}^{k} \lambda_{\max }^{n}(\mathrm{M}) \prod_{m=n+1}^{k}\left(1-\tau b_{1} \lambda_{\min }^{m}(\mathrm{M})\right),
\end{gathered} \tag{49}$$

где $\lambda_{i}(\mathrm{M}), \;\; i=\overline{m+1, n}$- собственные значения матрицы M; $\lambda_{\min }(\mathrm{M})=\min\limits_{m+1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_{i}(\mathrm{M}), \;\; \lambda_{\max }(\mathrm{M})=\max\limits_{m+1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_{i}(\mathrm{M})$- минимальное и максимальное собственные значения матрицы M.

Следующие равенства показывают, что последний член предыдущей суммы может быть ограничен независимо от M

$$\begin{gathered}
-\frac{1}{\tau b_{1}} \sum_{l=0}^{k}-\tau b_{1} \lambda_{i}^{l}(\mathrm{M}) \prod_{q=l+1}^{k}\left(1-\tau b_{1} \lambda_{i}^{q}(\mathrm{M})\right)= \\
-\frac{1}{\tau b_{1}} \sum_{l=0}^{k}\left(1-\tau b_{1} \lambda^{l}(\mathrm{M})-1\right) \prod_{q=l+1}^{k}\left(1-\tau b_{1} \lambda_{i}^{q}(\mathrm{M})\right)= \\
-\frac{1}{\tau b_{1}} \sum_{l=0}^{k}\left[\prod_{q=l}^{k}\left(1-\tau b_{1} \lambda_{i}^{q}(\bar{\bar{\mathrm{M}}})\right)-\prod_{q=l+1}^{k}\left(1-\tau b_{1} \lambda_{i}^{q}(\mathrm{M})\right)\right]= \\
-\frac{1}{\tau b_{1}}\left[\prod_{q=0}^{k}\left(1-\tau b_{1} \lambda_{i}^{q}(\mathrm{M})\right)-1\right]=\frac{1}{\tau b_{1}}\left[1-\prod_{q=0}^{k}\left(1-\tau b_{1} \lambda_{i}^{q}(\mathrm{M})\right)\right], \quad i=\overline{1, n}.
\end{gathered} \tag{50}$$

Заметим, что поскольку $b_1 < 1$ и τ удовлетворяет условию КФЛ (13), мы имеем, что для всех $k \geqslant 0$

$$\tau b_1 \lambda_i^k(\mathrm{M}) \leqslant b_1 h \leqslant 1, \quad i = \overline{1,n}$$

и, следовательно, $\left(1 - \tau b_1 \lambda_i^q(\mathrm{M})\right), \quad i = \overline{1,n}$ неотрицательные. Кроме того, по определению ${}_i a^k = h \sum_{j=0}^{J-1} {}_i u_j^k \geqslant -{}_i u^*, \qquad i = \overline{1,n}, \quad k = \{0, 1, \cdots\}$ и в силу (26) и (27) имеем

$$\left(A^k, A^k\right) \leqslant 4h \sum_{j=0}^{J-1} \left(U_j^k, U_j^k\right) e^{\alpha x_j} \leqslant \frac{8}{1 - \lambda_{\min}(E - \Theta)} \mathrm{L}^k, \ \ \forall k. \tag{51}$$

Комбинируя предыдущую оценку (49) и (50), получаем

$$\begin{gathered} \tfrac{1-\lambda_{\min}(E-\Theta)}{8} \left(A^k, A^k\right) \leqslant \mathrm{L}^k \leqslant \\ \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left\{ \begin{array}{l} \exp\left(-\tau b_1 \sum_{q=0}^{k} \lambda_i^q(\mathrm{M})\right) \mathrm{L}^0 + \\ \max\limits_{0\leqslant l\leqslant k} \left(\Delta^l, \Delta^l\right) \frac{b_2}{b_1} \left[1 - \prod_{q=0}^{k} \left(1 - \tau b_1 \lambda_i^q(\mathrm{M})\right)\right] \end{array} \right\} \leqslant \\ \mathrm{L}^0 + \max_{0\leqslant l\leqslant k} \left(\Delta^l, \Delta^l\right) \tfrac{b_2}{b_1} \leqslant \|\Phi\|_\alpha^2 + \max_{0\leqslant l\leqslant k} \left(\Delta^l, \Delta^l\right) \tfrac{2\left(\alpha^2+3\right)}{\alpha^2(1-\lambda_{\max}(\Theta^2))}. \end{gathered} \tag{52}$$

Так как норма $\|\Phi\|_\alpha^2$ ограничена согласно предположению (20), это показывает, что $\left(A^k, A^k\right)$ ограничено сверху константой $c \triangleq c\left(\mathrm{U}, \Theta, \alpha, \|\Delta\|_{l^\infty}\right)$. Отсюда следует, что существует константа $0 > \sigma_2 \triangleq \sigma_2\left(\mathrm{U}, U^*, \Theta, \alpha, \|\Delta\|_{l^\infty}\right)$ такая, что

$$\sigma_2 \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i^k(\mathrm{M}) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{P_i}{Q_i}, \ \ \forall k \geqslant 0. \tag{53}$$

Заметим, что норма $\|\Delta\|_{l^\infty}$может быть ограничена Ξ по предположению.

На последнем шаге мы теперь используем ограничение на М, чтобы получить экспоненциальное убывание L^k. Используя (53) в оценке (48), получаем для всех $k \geqslant 0$

$$\begin{gathered} \|\Phi\|_\alpha^2 + \max_{0\leqslant l\leqslant k} \left(\Delta^l, \Delta^l\right) \tfrac{2\left(\alpha^2+3\right)}{\alpha^2(1-\lambda_{\max}(\Theta^2))}, \\ \tfrac{\mathrm{L}^{k+1}-\mathrm{L}^k}{\tau} \leqslant -\alpha \tfrac{\left(1-\lambda_{\max}\left(\Theta^2\right)\right)}{2} \sigma_2 \mathrm{L}^k + \left(1 + \tfrac{3}{\alpha^2}\right) \max_{1\leqslant i\leqslant n} \tfrac{P_i}{Q_i} \left(\Delta^k, \Delta^k\right) = \\ -\eta \mathrm{L}^k + \nu \left(\Delta^k, \Delta^k\right), \end{gathered} \tag{54}$$

$$\eta = \alpha \tfrac{\left(1-\lambda_{\max}\left(\Theta^2\right)\right)}{2} \sigma_2, \ \nu = \left(1 + \tfrac{3}{\alpha^2}\right) \max_{1\leqslant i\leqslant n} \tfrac{P_i}{Q_i}.$$

4 Заключение

В работе исследована задача стабилизации состояния равновесия для гиперболического уравнения с отрицательной нелокальной характеристической скоростью и погрешностью измерения. Дано определение слабого решения и с помощью методологии построения функции Ляпунова приведено критерия устойчивости состояния равновесия смешанной задачи управления. Доказана теорема об экспоненциальной устойчивости состояния равновесия смешанной задачи. Для нахождения численного решения уравнения построена разностная схема. Дано понятие устойчивости ℓ^2-нормы численного решения равновесия по отношению к дискретным возмущениям состояния равновесия начально-краевой разностной задачи. Доказана теорема об устойчивости по Ляпунову численного решения относительно дискретного возмущения состояния равновесия начально-краевой разностной задачи в ℓ^2-нормы.

Литература

[1] *Coron, J.M., Wang, Z.* Output Feedback Stabilization for a Scalar Conservation Law with a Nonlocal Velocity SIAM J. Math. Anal. 45, – 2013. – P. 2646–2665, doi:10.1137/120902203.

[2] *Chen, W., Liu, C., Wang, Z.* Global Feedback Stabilization for a Class of Nonlocal Transport Equations: The Continuous and Discrete Case // SIAM J. Control Optim. – 2017. – Vol.55. – P. 760-784. – doi: http://dx.doi.org/10.1137/15m1048914.

[3] *Göttlich S., Herty M., Weldegiyorgis G.* Input-to-State Stability of a Scalar Conservation Law with Nonlocal Velocity // Axioms. – 2021. – Vol. 10, No. 12. – doi: http://dx.doi.org/10.3390/axioms10010012.

[4] *Coron J.M., Kawski M. Wang Z.* Analysis of a conservation law modeling a highly reentrant manufacturing system // Discret. Contin. Dyn. Syst. Ser. B. – 2010. – Vol. 14. – P. 1337-1359. – doi: http://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2010.14.1337.

[5] *Tanwani A., Prieur C., Tarbouriech S.* Stabilization of linear hyperbolic systems of balance laws with measurement errors // Control Subject to Computational and Communication Constraints. Vol. 475. – Cham: Springer, 2018. – P. 357-374.

[6] *Zhang L., Prieur C.* Necessary and Sufficient Conditions on the Exponential Stability of Positive Hyperbolic Systems // IEEE Trans. Automat. Control. – 2017. – Vol. 62. – P. 3610-3617. – doi: http://dx.doi.org/10.1109/TAC.2017.2661966.

[7] *Coron J.M. et al.* Dissipative boundary conditions for one-dimensional nonlinear hyperbolic systems // SIAM J. Control Optim. – 2008. – Vol. 47. – P. 1460-1498. – doi: http://dx.doi.org/10.1137/070706847.

[8] *Bastin G., Coron J.M.* Stability and Boundary Stabilization of 1-D Hyperbolic Systems. – Berlin: Springer, 2016. – doi: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-32062-5.

[9] *Aloev R. et al.* Stability Analysis of an Upwind Difference Splitting Scheme for Two-Dimensional Saint–Venant Equations // Symmetry. – 2022. – doi: http://dx.doi.org/10.3390/sym14101986.

[10] *Aloev R.D., Dadabaev S.U.* Stability of the upwind difference splitting scheme for symmetric t-hyperbolic systems with constant coefficients // Results in Applied Mathematics. – 2022. – doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.rinam.2022.100298.

[11] *Aloev R.D., Hudayberganov M.U.* A Discrete Analogue of the Lyapunov Function for Hyperbolic Systems // Journal of Mathematical Sciences. – 2022. – doi: http://dx.doi.org/10.1007/s10958-022-06028-y.

[12] *Aloev R.D. et al.* The Difference Splitting Scheme for n-Dimensional Hyperbolic Systems // Malaysian Journal of Mathematical Sciences. – 2022.

[13] *Aloev R. et al.* Development of an algorithm for calculating stable solutions of the Saint-Venant equation using an upwind implicit difference scheme // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2021. – doi: http://dx.doi.org/10.15587/1729-4061.2021.239148.

[14] *Aloev R.D. et al.* The difference splitting scheme for hyperbolic systems with variable coefficients // Mathematics and Statistics. – 2019. – doi: http://dx.doi.org/10.13189/ms.2019.070305.

[15] *Aloev R. et al.* Construction and research of adequate computational models for quasilinear hyperbolic systems // Numerical Algebra, Control and Optimization. – 2018. – doi: http://dx.doi.org/10.3934/naco.2018017.

[16] *Aloev R.D. et al.* The Difference Splitting Scheme for n-Dimensional Hyperbolic Systems // Malaysian Journal of Mathematical Sciences. – 2022. – No. 16(1). – P. 1-10 2022. – doi: http://dx.doi.org/10.47836/mjms.16.1.01.

Поступила в редакцию 02.02.2024

UDC 519.63

STUDY OF EXPONENTIAL STABILITY OF A NUMERICAL SOLUTION OF A HYPERBOLIC SYSTEM WITH NEGATIVE NONLOCAL CHARACTERISTIC VELOCITIES AND MEASUREMENT ERROR*

[1]***Aloev R.D.***, [2,3]***Berdyshev A.***, [1*]***Alimova V.***

*vasilarobiyaxon@gmail.com

[1]National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
4, Universitet Str., Tashkent, 100174 Uzbekistan;

[2]Kazakh National Pedagogical University named after Abay,
13, Dostyk Ave., Almaty, 050010, Kazakhstan;

[3]Institute of Information and Computing Technologies MSHE RK,
13, Dostyk Ave., Almaty, 050010, Kazakhstan;

[1]National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
4, Universitet Str., Tashkent, 100174 Uzbekistan

In this paper, we study the problem of stabilizing the equilibrium state for a hyperbolic system with *negative* nonlocal characteristic velocities and measurement error. The formulation of a mixed boundary control problem for the indicated hyperbolic system is given. The stability in the ℓ^2-norm with respect to a discrete perturbation of the equilibrium state of an initial-boundary difference problem is determined. A discrete Lyapunov function is constructed and a stability theorem for the equilibrium state of an initial-boundary difference problem in the ℓ^2-norm with respect to a discrete perturbation is proved.

Keywords: hyperbolic equation, nonlocal characteristic velocity, stability, explicit difference scheme.

Citation: Aloev R.D., Berdyshev A., Alimova V. 2024. Study of exponential stability of a numerical solution of a hyperbolic system with negative nonlocal characteristic velocities and measurement error. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 1(55): 122-139.

*The research was supported by The Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (grant number AR14872379).

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 1(55) 2024

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(99871) 231-92-45.
E-mail: journals@airi.uz.
Сайт: www.pvpm.uz (journals.airi.uz).

Дизайн и компьютерная вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 29.02.2024 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №1. Тираж 100 экз.

Содержание