УДК 519.6+51-74::628.395

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРИМЕСИ В УСЛОВИЯХ УЛИЧНОГО КАНЬОНА

**Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Журабоева О.С.*

*ravshanzade-09@mail.ru

Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта,

100125, Узбекистан, г. Ташкент, Мирзо-Улугбекский р-он, м-в Буз-2, д. 17А.

Для большинства крупных мегаполисов характерно наличие проблем, связанных с обеспечением экологически благополучной среды обитания населения. Так как население по большей части концентрируется в зонах жилой застройки, то именно в жилых массивах необходимо сохранять максимальный социальный и экологический комфорт. Среди основных источников загрязнения атмосферного воздуха жилых массивов можно отметить автомобильный транспорт. Современные городские путепроводы зачастую создают устойчивые зоны загрязнения, где предельно-допустимая концентрация вредных примесей превышается в несколько раз. Современные методы математического моделирования позволяют успешно решать задачи анализа и прогнозирования распространения вредных примесей в атмосфере с учетом характера воздушных потоков и особенностей городской застройки. Основной проблемой здесь является правильное воспроизведение структуры турбулентности воздушного потока, включая поля скорости и давления, турбулентное перемешивание, а также учет влияния элементов городского ландшафта на процесс переноса и диффузии примеси. Поэтому, целью данной работы является исследование процесса распространения примеси, развивающегося в турбулентных потоках в условиях уличных каньонов на основе разработанной модели, описываемой системой уравнений движения Навье–Стокса, уравнения распределения давления Пуассона, уравнения адвекции-диффузии и набора начальных и граничных условий. Для численного решения поставленной задачи разработан алгоритм, основанный на конечно-разностной схеме Кранка–Николсона. Разработанные модель и алгоритм были реализован в виде программного средства для проведения вычислительных экспериментов, результаты которых приведены в графическом виде и дана их интерпретация.

**Ключевые слова:** массоперенос в атмосфере, выбросы автотранспорта, городская застройка, уравнения Навье–Стокса, численный алгоритм, схема Кранка–Николсона, метод Якоби.

**Цитирование:** *Равшанов Н., Боборахимов Б.И., Журабоева О.С.* Численное моделирование турбулентного потока и распространения примеси в условиях уличного каньона // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – № 1(55). – С. 8-25.

## 1 Введение

Проблемы разработки адекватных математических моделей, эффективных вычислительных алгоритмов и программных средств для анализа процесса распространения примесей в турбулентных потоках пограничного слоя атмосферы, являются одними из наиболее актуальных. Их успешное решение способно обеспечить получение качественно новых знаний в задачах исследования экологических процессов, более точное и наглядное прогнозирование возможных нарушений санитарных норм и последствий экологических рисков, например, при проектировании и размещении новых промышленных объектов. Следует отметить, что значительный научный интерес вызывают задачи моделирования процессов распространения примесей в условиях городской застройки, в частности вдоль транспортных артерий и нагруженных уличных каньонов. Интерес обуславливается необходимостью решения целого ряда смежных задач, среди которых:

- городское планирование и дизайн – понимание динамики распространения примесей помогает проектировать городские пространства таким образом, чтобы минимизировать устойчивое накопление загрязняющих веществ путём оптимизации ориентации улиц, формы зданий и расположения зелёных насаждений для улучшения вентиляции;
- здоровье населения – качество воздуха в городах напрямую влияет на здоровье людей. Моделирование распространения примесей помогает оценить уровни концентрации загрязнения воздуха в различных частях города (промышленные зоны, нагруженные путепроводы и спальные районы), идентифицировать зоны высокого риска и разработать стратегии для снижения воздействия загрязненного воздуха на население;
- разработка нормативов – данные, полученные в результате моделирования, могут служить основой для разработки и корректировки экологических норм и стандартов, направленных на улучшение качества воздуха в городских условиях.

Учитывая текущие тенденции урбанизации и увеличение численности населения в городах, а также возрастающее внимание к экологическим проблемам и здоровью населения, задачи математического моделирования процессов распространения примесей в городских условиях остаются высокоприоритетной задачей в области городской экологии и планирования.

Проблемы развития математического моделирования процессов переноса и диффузии вредных веществ, развивающихся в турбулентных потоках приземного слоя атмосферы в условиях сложной геометрии, активно прорабатываются многочисленными исследователями в странах дальнего и ближнего зарубежья и в Узбекистане. К настоящему времени ими уже достигнуты значительные результаты теоретического и прикладного характера [1].

Как правило, построение математических моделей рассматриваемых процессов осуществляется при заведомых условиях, ограничениях и допущениях, не противоречащих физической природе этих процессов и основным законам сохранения энергии, импульса и массы, а также отвечающих желаемой точности решения конкретных теоретических или практических задач. Процесс распространения примесей в турбулентной воздушной среде атмосферы существенно зависит от многих факторов, включая физико-механические свойства самой среды и частиц примеси; характеристики источника выброса; погодно-климатические условия (скорость воздушного потока, температурная стратификация атмосферы, интенсивность турбулентного перемешивания, влажность воздушной массы, наличие осадков, солнечная радиация и т.д.); химическую трансформациию загрязняющих веществ; орографические характеристики местности и особенности наземного покрова и другие.

Выброс частиц примеси, поступающий в атмосферу в виде потока газовоздушной или воздушно-пылевой смеси, имеет определенные характеристики: массовый расход (мощность), скорость потока, температура и др., которые отличаются от соответствующих характеристик самой атмосферы. Вертикальный подъем выброса обуславливается такими факторами как начальная вертикальная скорость и разница температур. Стадия подъёма продолжается до тех пор, пока воздействие этих факторов не прекратится. Достигнутая при этом высота называется эффективной высотой выброса. С этого момента на поток частиц примеси начинают воздействовать другие силы.

Процесс смещения выброса в горизонтальной плоскости под действием силы ветра называется переносом или адвекцией, а произвольное перемещение массы частиц в горизонтальном и вертикальном направлениях за счет атмосферной турбулентности – диффузией. Оба данных процесса являются главными факторами, влияющими на рассеивание загрязняющих выбросов и распределение концентрации частиц примеси в окружающей среде.

Таким образом, наиболее реалистичное описание процесса распространения примесей в атмосфере требует описания всех сопутствующих эффектов (перенос, диффузия, осаждение, поглощение и др.) в рамках достаточно сложной детализированной модели, учитывающей также изменчивость этих факторов по времени и пространству вследствие, например, суточной или сезонной неоднородности ветрового и температурного режимов, влажности воздуха, устойчивости атмосферы, а также орографических особенностей территорий [1, 3].

К настоящему времени сложилось множество подходов к математическому моделированию процесса распространения примесей в атмосфере. К числу наиболее распространенных относятся: гауссовы модели рассеивания примесей; эйлеровы модели турбулентной диффузии; траекторные лагранжевы модели; модели вычислительной гидродинамики на основе полных или осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса [4–6].

В связи с увеличением доступных для исследователей вычислительных мощностей и развитию технологий параллелизации вычислений, в последнее время набирают все большую популярность модели вычислительной гидродинамики (CFD), описываемые набором дифференциальных уравнений в частных производных, зависящих от времени и трех пространственных координат, отражающих фундаментальные физические законы сохранения вещества, массы, импульса и энергии [7]. Составляющими любой CFD модели являются генератор вычислительной сетки, решатель и модель турбулентности, в зависимости от последней CFD модели подразделяются несколько типов.

Подход DNS (от англ. Direct Numerical Simulation) подразумевает решение уравнений Навье–Стокса без использования каких-либо допущений, то есть прямое численное моделирование. Модели DNS требуют значительных вычислительных ресурсов из-за необходимости разрешать все масштабы турбулентности в потоке. Это включает в себя как самые большие вихри, так и самые маленькие турбулентные структуры, что делает DNS идеальным для детального изучения турбулентности, но его применение ограничено из-за высокой вычислительной стоимости, особенно для потоков с высоким числом Рейнольдса..

Суть метода крупных вихрей LES (от англ. Large Eddy Simulation) заключается в том, что малые масштабы турбулентности пространственно отфильтровываются, в то время как большие, содержащие большую энергию – решаются напрямую. Для разрешения неизвестных членов в отфильтрованных уравнениях Навье–Стокса обычно используется турбулентное замыкание И. Смагоринского [8] или его модификации. Хотя вычислительные затраты LES заметно меньшие, чем при прямом численном моделировании DNS, тем не менее эти модели также малопригодны для реальных инженерных расчетов.

В отличие от первых двух типов CFD моделей, RANS (от англ. RANS – Reynolds-averaged Navier–Stokes equations) модели упрощают решение уравнений турбулентного потока, усредняя их по времени. Это позволяет смоделировать среднее поведение турбулентных потоков, используя дополнительные уравнения для описания турбулентных напряжений. RANS наиболее подходит для стационарных или слабо изменяющихся потоков и широко используется в инженерных расчетах благодаря своей вычислительной эффективности.

В принципе CFD модели могут применяться к любому сценарию выбросов, ландшафту и метеоусловиям. Однако, как показывают результаты ряда исследований, по мере увеличения масштаба, надежность результатов CFD неуклонно снижается [9]. Типичный пример использования CFD моделей – прогнозирование распространения примеси при циркуляции атмосферного воздуха в замкнутых помещениях или в условиях сложной городской застройки, когда размеры рассматриваемой области не превышают 1 км$^2$.

## 2 Постановка задачи

Математическая модель процесса распространения субстанции в турбулентном потоке несжимаемой жидкости (атмосферный воздух), развивающегося в области со сложной геометрией (городской уличный каньон), описывается следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных:

– уравнение количества движения Навье–Стокса [10], записанное в виде проекций скорости на соответствующие оси прямоугольной декартовой системы координат:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + F_u;\\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + F_v;\\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + F_w;
\end{aligned} \tag{1}$$

– вспомогательное уравнение распределения давления Пуассона [11] для обеспечения соблюдение условия несжимаемости потока:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} =\\
= -\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\right);
\end{gathered} \tag{2}$$

– уравнение адвекции-диффузии для определения пространственно-временного распределения концентрации примеси [12, 13]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} + w\frac{\partial C}{\partial z} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right) + S_c. \tag{3}$$

Здесь $u$, $v$, $w$ – компоненты скорости ветра по координатным направлениям $x$, $y$, $z$ соответственно; $P$ – атмосферное давление; $C$ – концентрация загрязняющей примеси; $\rho$ – плотность атмосферного воздуха; $\nu$ – кинематическая вязкость воздуха; $D = D_x = D_y = D_z$ – коэффициент турбулентной диффузии; $F_x$, $F_y$, $F_z$ – компоненты вектора объемных сил, действующих на жидкость, в направлениях $x$, $y$, $z$ соответственно; $S_c$ – источник выброса загрязняющей примеси.

Нужно отметить, что в уравнении адвекции-диффузии для описания источника выброса в пространстве и по времени, дополнительно вводится дельта-функция

Дирака:

$$S_c = S\delta\left(x - x_S, y - y_S, z - z_S\right)\delta\left(t - t_S\right),$$

где $S$ – это собственно мощность источника выброса; $\delta\left(x - x_S, y - y_S, z - z_S\right)$ – дельта-функция Дирака в пространстве с центром в точке $(x_S,\ y_S,\ z_S)$; $\delta\left(t - t_S\right)$ – дельта-функция Дирака во времени с центром в точке $t_S$.

Далее, система (1)-(3) дополняется нижеследующей комбинацией начальных и граничных условий:

– начальное поле скорости воздушного внутри области:

$$u\left(x, y, z, 0\right) = u_0\left(x, y, z\right),\ v\left(x, y, z, 0\right) = v_0\left(x, y, z\right),\ w\left(x, y, z, 0\right) = w_0\left(x, y, z\right); \quad (4)$$

– начальное поле атмосферного давления:

$$P\left(x, y, z, 0\right) = P_0\left(x, y, z\right); \quad (5)$$

– начальное поле концентрации примеси:

$$C\left(x, y, z, 0\right) = C_0\left(x, y, z\right); \quad (6)$$

– компоненты вектора скорости потока, поступающего в область на границе:

$$u\left(x, y, z, t\right) = u_{\text{inlet}}\left(t\right),\ v\left(x, y, z, t\right) = v_{\text{inlet}}\left(t\right),\ w\left(x, y, z, t\right) = w_{\text{inlet}}\left(t\right), \quad (7)$$

где $u_{\text{inlet}}\left(t\right),\ v_{\text{inlet}}\left(t\right),\ w_{\text{inlet}}\left(t\right)$ – составляющие скорости притока, заданные как функции времени;

– компоненты вектора скорости потока, исходящего из области на границе:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L_x} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=L_y} = \left.\frac{\partial z}{\partial z}\right|_{z=L_z} = 0, \quad (8)$$

где $L_x,\ L_y,\ L_z$ – размеры (длина, ширина, высота) рассматриваемой области;

– компоненты вектора скорости потока и коэффициент турбулентной диффузии на непроницаемых замкнутых поверхностях геометрических тел (объекты городской застройки) внутри рассматриваемой области:

$$u = v = w = D = 0; \quad (9)$$

– поступающая вместе с потоком концентрация примеси на границе (приток):

$$C\left(x, y, z, t\right) = C_{\text{inlet}}\left(t\right), \quad (10)$$

где $C_{\text{inlet}}\left(t\right)$ – задается как функции времени;

– градиент концентрации на границе выхода из области (отток):

$$\begin{aligned} C\left(x_n, y, z, t\right) &= C\left(x_{n-1}, y, z, t\right) - \left(C\left(x_{n-1}, y, z, t\right) - C\left(x_{n-2}, y, z, t\right)\right); \\ C\left(x, y_n, z, t\right) &= C\left(x, y_{n-1}, z, t\right) - \left(C\left(x, y_{n-1}, z, t\right) - C\left(x, y_{n-2}, z, t\right)\right); \\ C\left(x, y, z_n, t\right) &= C\left(x, y, z_{n-1}, t\right) - \left(C\left(x, y, z_{n-1}, t\right) - C\left(x, y, z_{n-2}, t\right)\right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $x_n,\ y_n,\ z_n$ – конечные значения пространственных переменных вдоль соответствующих координатных направлений.

На нижней же границе выполняется условие полного отражения:

$$D_z\frac{\partial C}{\partial z} + wC = 0 \text{ при } z = 0. \quad (12)$$

## 3 Метод решения

Очевидно, что для поставленной задачи (1)-(12), может быть найдено только приближенное решение. Поэтому для ее решения используем одну из разновидностей конечно-разностного метода решения дифференциальных уравнений – метод Кранка–Николсона [14].

В первую очередь область непрерывного изменения искомых переменных заменяем сеткой, состоящей из дискретного множества точек (узлов), в которых можно будет аппроксимироваться решение:

$$\Omega_{xyzt} = \{(x_i = i\Delta x,\ y_j = j\Delta y,\ z_k = k\Delta z,\ t_n = n\Delta t)\,; \\ i = \overline{1, N_x};\ j = \overline{1, N_y};\ k = \overline{1, N_z};\ n = \overline{0, N_t}; \Delta t = 1/N_t\}\,,$$

где $N_x,\ N_y,\ N_z$ – количество узлов сетки в вдоль каждой координатной оси; $N_t$ – количество временных слоев; $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z,\ \Delta t$ – значения шагов по пространственным координатам и времени.

Очень важно отметить, что определение оптимальных значений $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z,\ \Delta t$ является залогом обеспечения устойчивости вычислительного процесса. Общим критерием устойчивости при численном моделировании подобных гидродинамических задач выступает условие Куранта–Фридрихса–Леви (КФЛ или CFL), которое применяется к схемам с временным шагом. В нашем случае, критерий КФЛ физически означает то, что частица примеси за один шаг по времени не должна продвинуться больше, чем на один пространственный шаг. Тем самым, критерий КФЛ можно выразить следующим образом:

$$\Delta t \leqslant \frac{CFL}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \frac{|w|}{\Delta z}},$$

где $CFL$ – число Куранта со значением меньше 1. Для явных схем типичные значения $CFL$ находятся в диапазоне от 0,3 до 0,7. Для моделирования процессов, включающих диффузию (или течение вязкой жидкости), критерий устойчивости определяется из дискретизации диффузионного члена. Например, для коэффициента изотропной диффузии или кинематической вязкости в уравнениях Навье–Стокса, критерий устойчивости явной схемы может выглядеть так:

$$\Delta t \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x^2\Delta y^2 + \Delta x^2\Delta z^2 + \Delta y^2\Delta z^2}{D\left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right)}\right).$$

Как было сказано выше, для решения поставленной задачи (1)-(12), используется метод Кранка–Николсона, то критерий устойчивости принимаем в следующем виде:

$$\Delta t \leqslant \left(\frac{\Delta x^2\Delta y^2 + \Delta x^2\Delta z^2 + \Delta y^2\Delta z^2}{D\left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right)}\right). \tag{13}$$

Далее, заменяем дифференциальные операторы конечно-разностными соотношениями и получаем разностные аналоги уравнений (1)-(3):

$$\begin{gathered}\frac{u^{n+1}_{i,j,k} - u^{n}_{i,j,k}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\left(u^{n+1}_{i,j,k} + u^{n}_{i,j,k}\right)\left(\frac{u^{n+1}_{i+1,j,k} - u^{n+1}_{i-1,j,k}}{2\Delta x}\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(v^{n+1}_{i,j,k} + v^{n}_{i,j,k}\right)\left(\frac{u^{n+1}_{i,j+1,k} - u^{n+1}_{i,j-1,k}}{2\Delta y}\right) + \frac{1}{2}\left(w^{n+1}_{i,j,k} + w^{n}_{i,j,k}\right)\left(\frac{u^{n+1}_{i,j,k+1} - u^{n+1}_{i,j,k-1}}{2\Delta z}\right) = \\ = -\frac{1}{2\rho}\left(\frac{P^{n+1}_{i+1,j,k} - P^{n+1}_{i-1,j,k}}{2\Delta x}\right) + \nu\left(\frac{u^{n+1}_{i+1,j,k} - 2u^{n+1}_{i,j,k} + u^{n+1}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(w^{n+1}_{i,j,k} + w^{n}_{i,j,k}\right)\left(\frac{u^{n+1}_{i,j,k+1} - u^{n+1}_{i,j,k-1}}{2\Delta z}\right) =\end{gathered} \tag{14}$$

$$= -\frac{1}{2\rho}\left(\frac{P^{n+1}_{i+1,j,k} - P^{n+1}_{i-1,j,k}}{2\Delta x}\right) + \nu\left(\frac{u^{n+1}_{i+1,j,k} - 2u^{n+1}_{i,j,k} + u^{n+1}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}\right);$$

$$\begin{gathered}
\frac{v^{n+1}_{i,j,k} - v^{n}_{i,j,k}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\left(u^{n+1}_{i,j,k} + u^{n}_{i,j,k}\right)\left(\frac{v^{n+1}_{i+1,j,k} - v^{n+1}_{i-1,j,k}}{2\Delta x}\right) + \\
+\frac{1}{2}\left(v^{n+1}_{i,j,k} + v^{n}_{i,j,k}\right)\left(\frac{v^{n+1}_{i,j+1,k} - v^{n+1}_{i,j-1,k}}{2\Delta y}\right) + \frac{1}{2}\left(w^{n+1}_{i,j,k} + w^{n}_{i,j,k}\right)\left(\frac{v^{n+1}_{i,j,k+1} - v^{n+1}_{i,j,k-1}}{2\Delta z}\right) = \\
= -\frac{1}{2\rho}\left(\frac{P^{n+1}_{i,j+1,k} - P^{n+1}_{i,j-1,k}}{2\Delta y}\right) + \nu\left(\frac{v^{n+1}_{i+1,j,k} - 2v^{n+1}_{i,j,k} + v^{n+1}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}\right) + \\
+\nu\left(\frac{v^{n+1}_{i,j+1,k} - 2v^{n+1}_{i,j,k} + v^{n+1}_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}\right) + \nu\left(\frac{v^{n+1}_{i,j,k+1} - 2v^{n+1}_{i,j,k} + v^{n+1}_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}\right) + F_v;
\end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered}
\frac{w^{n+1}_{i,j,k} - w^{n}_{i,j,k}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\left(u^{n+1}_{i,j,k} + u^{n}_{i,j,k}\right)\left(\frac{w^{n+1}_{i+1,j,k} - w^{n+1}_{i-1,j,k}}{2\Delta x}\right) + \\
+\frac{1}{2}\left(v^{n+1}_{i,j,k} + v^{n}_{i,j,k}\right)\left(\frac{w^{n+1}_{i,j+1,k} - w^{n+1}_{i,j-1,k}}{2\Delta y}\right) + \\
+\frac{1}{2}\left(w^{n+1}_{i,j,k} + w^{n}_{i,j,k}\right)\left(\frac{w^{n+1}_{i,j,k+1} - w^{n+1}_{i,j,k-1}}{2\Delta z}\right) = \\
= -\frac{1}{2\rho}\left(\frac{P^{n+1}_{i,j,k+1} - P^{n+1}_{i,j,k-1}}{2\Delta z}\right) + \nu\left(\frac{w^{n+1}_{i+1,j,k} - 2w^{n+1}_{i,j,k} + w^{n+1}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}\right) + \\
+\nu\left(\frac{w^{n+1}_{i,j+1,k} - 2w^{n+1}_{i,j,k} + w^{n+1}_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}\right) + \nu\left(\frac{w^{n+1}_{i,j,k+1} - 2w^{n+1}_{i,j,k} + w^{n+1}_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}\right) + F_w;
\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}
\frac{P^{n+1}_{i+1,j,k} - 2P^{n+1}_{i,j,k} + P^{n+1}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{P^{n+1}_{i,j+1,k} - 2P^{n+1}_{i,j,k} + P^{n+1}_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} + \\
+\frac{P^{n+1}_{i,j,k+1} - 2P^{n+1}_{i,j,k} + P^{n+1}_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} = \\
= \frac{\rho}{2\Delta t}\left(\frac{u^{n+1}_{i+1,j,k} - u^{n+1}_{i-1,j,k}}{2\Delta x} + \frac{v^{n+1}_{i,j+1,k} - v^{n+1}_{i,j-1,k}}{2\Delta y} + \frac{w^{n+1}_{i,j,k+1} - w^{n+1}_{i,j,k-1}}{2\Delta z}\right);
\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}
\frac{C^{n+1}_{i,j,k} - C^{n}_{i,j,k}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\left(u^{n+1}_{i,j,k} + u^{n}_{i,j,k}\right)\left(\frac{C^{n+1}_{i+1,j,k} - C^{n+1}_{i-1,j,k}}{2\Delta x}\right) + \\
+\frac{1}{2}\left(v^{n+1}_{i,j,k} + v^{n}_{i,j,k}\right)\left(\frac{C^{n+1}_{i,j+1,k} - C^{n+1}_{i,j-1,k}}{2\Delta y}\right) + \\
+\frac{1}{2}\left(w^{n+1}_{i,j,k} + w^{n}_{i,j,k}\right)\left(\frac{C^{n+1}_{i,j,k+1} - C^{n+1}_{i,j,k-1}}{2\Delta z}\right) = \\
= D\left(\frac{C^{n+1}_{i+1,j,k} - 2C^{n+1}_{i,j,k} + C^{n+1}_{i-1,j,k}}{\Delta x^2}\right) + D\left(\frac{C^{n+1}_{i,j+1,k} - 2C^{n+1}_{i,j,k} + C^{n+1}_{i,j-1,k}}{\Delta y^2}\right) + \\
+D\left(\frac{C^{n+1}_{i,j,k+1} - 2C^{n+1}_{i,j,k} + C^{n+1}_{i,j,k-1}}{\Delta z^2}\right) + S_c.
\end{gathered} \tag{18}$$

После некоторых преобразований, окончательно получаем

$$
\begin{aligned}
u_{i,j,k}^{n+1} = u_{i,j,k}^{n} + \frac{\Delta t}{2}\Bigg[ & -\frac{1}{2}\left(u_{i,j,k}^{n+1}+u_{i,j,k}^{n}\right)\left(\frac{u_{i+1,j,k}^{n+1}-u_{i-1,j,k}^{n+1}}{2\Delta x}\right)- \\
& -\frac{1}{2}\left(v_{i,j,k}^{n+1}+v_{i,j,k}^{n}\right)\left(\frac{u_{i,j+1,k}^{n+1}-u_{i,j-1,k}^{n+1}}{2\Delta y}\right)- \\
& -\frac{1}{2}\left(w_{i,j,k}^{n+1}+w_{i,j,k}^{n}\right)\left(\frac{u_{i,j,k+1}^{n+1}-u_{i,j,k-1}^{n+1}}{2\Delta z}\right)- \\
& -\frac{1}{\rho}\left(\frac{P_{i+1,j,k}^{n+1}-P_{i-1,j,k}^{n+1}}{2\Delta x}\right)+\nu\left(\frac{u_{i+1,j,k}^{n+1}-2u_{i,j,k}^{n+1}+u_{i-1,j,k}^{n+1}}{\Delta x^2}\right)+ \\
& +\nu\left(\frac{u_{i,j+1,k}^{n+1}-2u_{i,j,k}^{n+1}+u_{i,j-1,k}^{n+1}}{\Delta y^2}\right)+\nu\left(\frac{u_{i,j,k+1}^{n+1}-2u_{i,j,k}^{n+1}+u_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z^2}\right)\Bigg];
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{i,j,k}^{n+1} = v_{i,j,k}^{n} + \frac{\Delta t}{2}\Bigg[ & -\frac{1}{2}\left(u_{i,j,k}^{n+1}+u_{i,j,k}^{n}\right)\left(\frac{v_{i+1,j,k}^{n+1}-v_{i-1,j,k}^{n+1}}{2\Delta x}\right)- \\
& -\frac{1}{2}\left(v_{i,j,k}^{n+1}+v_{i,j,k}^{n}\right)\left(\frac{v_{i,j+1,k}^{n+1}-v_{i,j-1,k}^{n+1}}{2\Delta y}\right)- \\
& -\frac{1}{2}\left(w_{i,j,k}^{n+1}+w_{i,j,k}^{n}\right)\left(\frac{v_{i,j,k+1}^{n+1}-v_{i,j,k-1}^{n+1}}{2\Delta z}\right)+ \\
& +\frac{1}{2\rho}\left(\frac{P_{i,j+1,k}^{n+1}-P_{i,j-1,k}^{n+1}}{2\Delta y}\right)-\nu\left(\frac{v_{i+1,j,k}^{n+1}-2v_{i,j,k}^{n+1}+v_{i-1,j,k}^{n+1}}{\Delta x^2}\right)- \\
& -\nu\left(\frac{v_{i,j+1,k}^{n+1}-2v_{i,j,k}^{n+1}+v_{i,j-1,k}^{n+1}}{\Delta y^2}\right)-\nu\left(\frac{v_{i,j,k+1}^{n+1}-2v_{i,j,k}^{n+1}+v_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z^2}\right)-F_v\Bigg];
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
w_{i,j,k}^{n+1} = w_{i,j,k}^{n} + \frac{\Delta t}{2}\Bigg[ & -\frac{1}{2}\left(u_{i,j,k}^{n+1}+u_{i,j,k}^{n}\right)\left(\frac{w_{i+1,j,k}^{n+1}-w_{i-1,j,k}^{n+1}}{2\Delta x}\right)- \\
& -\frac{1}{2}\left(v_{i,j,k}^{n+1}+v_{i,j,k}^{n}\right)\left(\frac{w_{i,j+1,k}^{n+1}-w_{i,j-1,k}^{n+1}}{2\Delta y}\right)- \\
& -\frac{1}{2}\left(w_{i,j,k}^{n+1}+w_{i,j,k}^{n}\right)\left(\frac{w_{i,j,k+1}^{n+1}-w_{i,j,k-1}^{n+1}}{2\Delta z}\right)+ \\
& +\frac{1}{2\rho}\left(\frac{P_{i,j,k+1}^{n+1}-P_{i,j,k-1}^{n+1}}{2\Delta z}\right)-\nu\left(\frac{w_{i+1,j,k}^{n+1}-2w_{i,j,k}^{n+1}+w_{i-1,j,k}^{n+1}}{\Delta x^2}\right)- \\
& -\nu\left(\frac{w_{i,j+1,k}^{n+1}-2w_{i,j,k}^{n+1}+w_{i,j-1,k}^{n+1}}{\Delta y^2}\right)-\nu\left(\frac{w_{i,j,k+1}^{n+1}-2w_{i,j,k}^{n+1}+w_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z^2}\right)-F_v\Bigg];
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
P_{i,j,k}^{n+1} = P_{i,j,k}^{n} - \frac{\Delta t}{\rho}\left(\frac{u_{i+1,j,k}^{n+1}-u_{i-1,j,k}^{n+1}}{2\Delta x}+\frac{v_{i,j+1,k}^{n+1}-v_{i,j-1,k}^{n+1}}{2\Delta y}+\frac{w_{i,j,k+1}^{n+1}-w_{i,j,k-1}^{n+1}}{2\Delta z}\right); \tag{22}
$$

$$C_{i,j,k}^{n+1} = C_{i,j,k}^{n} + \frac{\Delta t}{2}\left[-u_{i,j,k}^{*}\left(\frac{C_{i+1,j,k}^{n+1} - C_{i-1,j,k}^{n+1}}{2\Delta x}\right) - v_{i,j,k}^{*}\left(\frac{C_{i,j+1,k}^{n+1} - C_{i,j-1,k}^{n+1}}{2\Delta y}\right) - \right.$$
$$-w_{i,j,k}^{*}\left(\frac{C_{i,j,k+1}^{n+1} - C_{i,j,k-1}^{n+1}}{2\Delta z}\right) + D\left(\frac{C_{i+1,j,k}^{n+1} - 2C_{i,j,k}^{n+1} + C_{i-1,j,k}^{n+1}}{\Delta x^2} + \right. \tag{23}$$
$$\left.\left. + \frac{C_{i,j+1,k}^{n+1} - 2C_{i,j,k}^{n+1} + C_{i,j-1,k}^{n+1}}{\Delta y^2} + \frac{C_{i,j,k+1}^{n+1} - 2C_{i,j,k}^{n+1} + C_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z^2}\right) + S_c\right].$$

Уравнения (19)-(23) сводятся к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), матрица которой имеет следующий вид:

$$AX = B, \tag{24}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} A_{u_x} & A_{u_y} & A_{u_z} & 0 & 0 \\ A_{v_x} & A_{v_y} & A_{v_z} & 0 & 0 \\ A_{w_x} & A_{w_y} & A_{w_z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_C \end{bmatrix} \text{– матрица коэффициентов;}$$

$$X = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ P \\ C \end{bmatrix} \text{– вектор неизвестных значений сеточных функции с верхнего слоя } t_{n+1};$$

$$B = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ P \\ C \end{bmatrix} \text{– вектор известных значений с нижнего слоя } t_n.$$

Отметим, что матрица коэффициентов $A$ формируется путем объединения подматриц $A_{u_x}$, $A_{u_y}$, $A_{u_z}$, $A_{v_x}$, $A_{v_y}$, $A_{v_z}$, $A_{w_x}$, $A_{w_y}$, $A_{w_z}$, $A_P$, $A_C$, каждая их которых содержит элементы, связанные с пространственной дискретизацией уравнений (1)-(3) на соответствующем слое по времени

$x$-производная $u$:

$$A_{u_x} = \begin{bmatrix} A_{u_{x_{11}}} & A_{u_{x_{12}}} & \dots & A_{u_{x_{1N}}} \\ A_{u_{x_{21}}} & A_{u_{x_{22}}} & \dots & A_{u_{x_{2N}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{u_{x_{N1}}} & A_{u_{x_{N2}}} & \dots & A_{u_{x_{NN}}} \end{bmatrix};$$

$x$-производная $v$:

$$A_{v_x} = \begin{bmatrix} A_{v_{x_{11}}} & A_{v_{x_{12}}} & \dots & A_{v_{x_{1N}}} \\ A_{v_{x_{21}}} & A_{v_{x_{22}}} & \dots & A_{v_{x_{2N}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{v_{x_{N1}}} & A_{v_{x_{N2}}} & \dots & A_{v_{x_{NN}}} \end{bmatrix};$$

$y$-производная $u$:

$$A_{u_y} = \begin{bmatrix} A_{u_{y_{11}}} & A_{u_{y_{12}}} & \dots & A_{u_{y_{1N}}} \\ A_{u_{y_{21}}} & A_{u_{y_{22}}} & \dots & A_{u_{y_{2N}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{u_{y_{N1}}} & A_{u_{y_{N2}}} & \dots & A_{u_{y_{NN}}} \end{bmatrix};$$

$y$-производная $v$:

$$A_{v_y} = \begin{bmatrix} A_{v_{y_{11}}} & A_{v_{y_{12}}} & \dots & A_{v_{y_{1N}}} \\ A_{v_{y_{21}}} & A_{v_{y_{22}}} & \dots & A_{v_{y_{2N}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{v_{y_{N1}}} & A_{v_{y_{N2}}} & \dots & A_{v_{y_{NN}}} \end{bmatrix};$$

$z$-производная $u$:

$$A_{u_y} = \begin{bmatrix} A_{u_{y_{11}}} & A_{u_{y_{12}}} & \dots & A_{u_{y_{1N}}} \\ A_{u_{y_{21}}} & A_{u_{y_{22}}} & \dots & A_{u_{y_{2N}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{u_{y_{N1}}} & A_{u_{y_{N2}}} & \dots & A_{u_{y_{NN}}} \end{bmatrix};$$

$z$-производная $v$:

$$A_{v_z} = \begin{bmatrix} A_{v_{z_{11}}} & A_{v_{z_{12}}} & \dots & A_{v_{z_{1N}}} \\ A_{v_{z_{21}}} & A_{v_{z_{22}}} & \dots & A_{v_{z_{2N}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{v_{z_{N1}}} & A_{v_{z_{N2}}} & \dots & A_{v_{z_{NN}}} \end{bmatrix};$$

$x$-производная $w$:

$$A_{w_x} = \begin{bmatrix} A_{w_{x_{11}}} & A_{w_{x_{12}}} & \dots & A_{w_{x_{1N}}} \\ A_{w_{x_{21}}} & A_{w_{x_{22}}} & \dots & A_{w_{x_{2N}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{w_{x_{N1}}} & A_{w_{x_{N2}}} & \dots & A_{w_{x_{NN}}} \end{bmatrix};$$

матрица коэффициентов уравнения давления:

$$A_P = \begin{bmatrix} A_{P_{11}} & A_{P_{12}} & \dots & A_{P_{1N}} \\ A_{P_{21}} & A_{P_{22}} & \dots & A_{P_{2N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{P_{N1}} & A_{P_{N2}} & \dots & A_{P_{NN}} \end{bmatrix};$$

$y$-производная $w$:

$$A_{w_y} = \begin{bmatrix} A_{w_{y_{11}}} & A_{w_{y_{12}}} & \dots & A_{w_{y_{1N}}} \\ A_{w_{y_{21}}} & A_{w_{y_{22}}} & \dots & A_{w_{y_{2N}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{w_{y_{N1}}} & A_{w_{y_{N2}}} & \dots & A_{w_{y_{NN}}} \end{bmatrix};$$

матрица коэффициентов уравнения концентрации:

$$A_C = \begin{bmatrix} A_{C_{11}} & A_{C_{12}} & \dots & A_{C_{1N}} \\ A_{C_{21}} & A_{C_{22}} & \dots & A_{C_{2N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{C_{N1}} & A_{C_{N2}} & \dots & A_{C_{NN}} \end{bmatrix}.$$

$z$-производная $w$:

$$A_{w_z} = \begin{bmatrix} A_{w_{z_{11}}} & A_{w_{z_{12}}} & \dots & A_{w_{z_{1N}}} \\ A_{w_{z_{21}}} & A_{w_{z_{22}}} & \dots & A_{w_{z_{2N}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{w_{z_{N1}}} & A_{w_{z_{N2}}} & \dots & A_{w_{z_{NN}}} \end{bmatrix};$$

Для решения СЛАУ, представленной матричным уравнением (24), применяем метод Якоби – разновидность метода простой итерации для численного решения СЛАУ.

Первое приближение для вектора $X$ выбираем следующим образом

$$X = [u_0, v_0, w_0, P_0, C_0].$$

Далее выполняем итерационный процесс по следующей формуле итерации:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right); \; i = 1, 2, \dots, n,$$

где $x_i^{(k+1)}$ – значение $i$-й переменной вектора $X$ на $(k+1)$-й итерации; $a_{ii}$ – элементы на главной диагонали матрицы $A$; $b_i$ – $i$-й элемент вектора $B$; $a_{ij}$ – элементы матрицы $A$; $x_j^{(k)}$ – значения переменных вектора $X$ на $k$-й итерации.

Итерация продолжается до достижения условия сходимости метода. Для этого вычисляем вектор невязки $R = B - AX$, а затем проверяем меньше ли норма невязки $R$ некоторого заданного значения допустимой погрешности $\varepsilon$. Если

$$||R|| < \varepsilon,$$

то решение сошлось, и итерацию можно прекратить.

Для избежания бесконечного цикла в случае, если сходимость не достигается за разумное количество шагов, следует установить максимальное количество итераций.

Таким образом, разработаны математическая модель процесса распространения примеси в турбулентной среде приземного слоя атмосферы в условиях городского уличного каньона с учетом скорости воздушного потока и атмосферного давления, а также численный алгоритм решения задачи прогнозирования распределения поля концентрации примеси по времени и пространству. Предложенный алгоритм имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространственным переменным.

## 4 Результаты

Проверка адекватности разработанного математического аппарата осуществлялась путем проведения компьютерных вычислительных экспериментов. С этой целью рассмотренные математическая модель и численный алгоритм были реализованы в виде программного средства на языке Python.

Для моделирования исследуемого процесса распространения примеси в приземном слое атмосферы с учетом элементов городской застройки были приняты следующие условия и ограничения.

В качестве области решения задачи рассматривался условный городской массив прямоугольной формы размерами $L_x = 900$, $L_y = 300$, $L_z = 100$ м, а в качестве одиночного линейного источника выброса загрязняющей примеси принимали участок 8-ми полосной автомобильной дороги протяженностью 300 м и шириной 32 м, расположенной у левой границы области. За выброс принимали совокупный объём выхлопа отработавших газов автомобильного трафика (рис. 1), движущегося по рассматриваемому участку путепровода, в пересчете на диоксид углерода ($CO_2$), выбрасываемый в атмосферу за единицу времени.

**Рис. 1** Пример моделируемого участка внутригородского путепровода с автомобильным трафиком, рассматриваемого в качестве источника загрязнения атмосферы

Схематичное представление области решения задачи с линейным источником выброса и элементами городской застройки приведено на рис. 2 и 3.

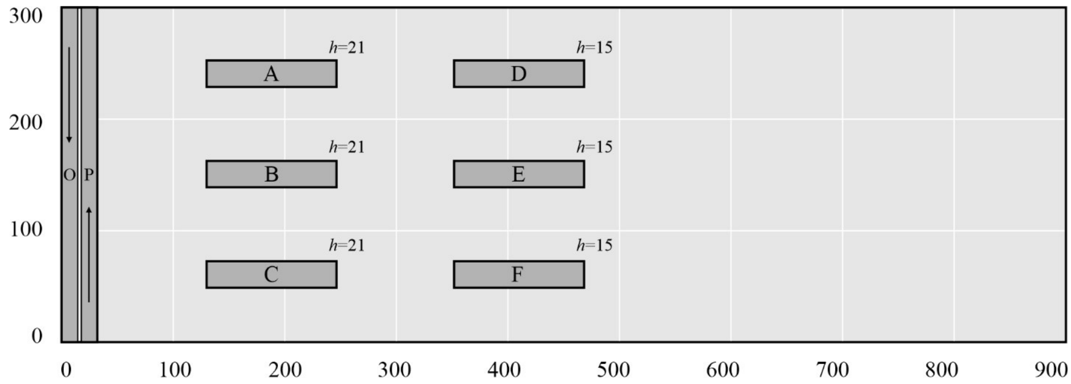


**Рис. 2** Схематичное представление рассматриваемой физической области. Здесь O P – участок 8-ми полосной автодороги размером 300 на 32 м; A, B, C, D, E, F – 7-ми и 5-ти этажные здания; $h$ – высота зданий (м).

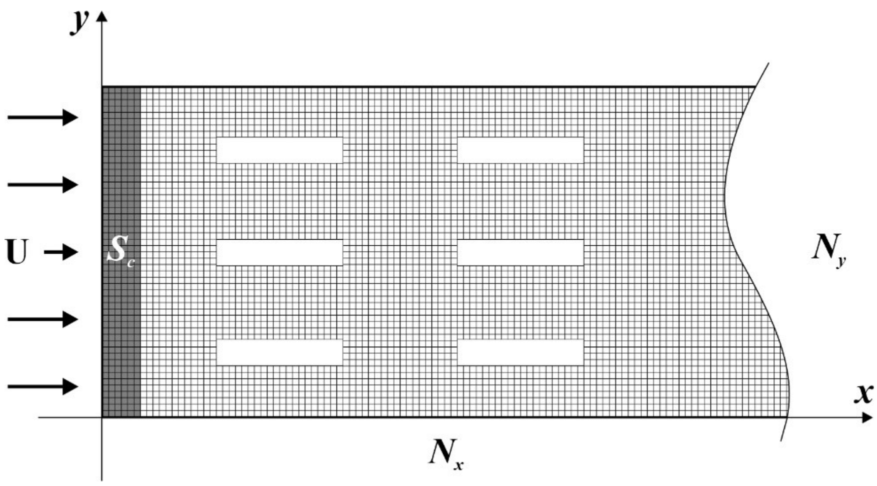


**Рис. 3** Схематичное представление расчётной области с количеством узлов сетки $N_x \times N \times$ $\times\ N_z$. Здесь U$=[u,\ v,\ w]$ – вектор скорости воздушного потока; $S_c$ – линейный источник выброса загрязняющей примеси.

В ходе вычислительного эксперимента были заданы следующие начальные значения компонент скорости ветра внутри области $\Omega$: $u_0 = 2$, $v_0 = 1$, $w_0 = 0,1$ м/с; коэффициента турбулентной диффузии $D = 1,0$ м$^2$/с; концентрации загрязняющей примеси $CO_2$: $C_0 = 0,0$ кг/м3. Значение мощность источника выброса выбирали исходя из предположения о минимальной загрузке рассматриваемого 300-метрового участка автодороги – до 5 автомобилей единовременно. То есть, с учетом того, что средний выброс легкового автомобиля составляет 180 г/км, мощность источника составляет$S = 10,0$ г/с. Что касается значений остальных параметров процесса, то они устанавливались исходя условий сухой маловетреной погоды, умеренной температуры 20 C° и атмосферного давления в пределах нормы (725-730 мм рт.ст.).

Как было сказано выше, подбор оптимальных значений $\Delta t$ осуществляется при каждом запуске алгоритма. Отметим, что для приведенных параметров процесса, в целом устойчивость вычислительного процесса всегда сохранялась при $\Delta t = 0,00001$.

На рис. 4-10 приведена графическая визуализация результатов расчетов распределения поля концентрации загрязняющей примеси на различных высотах по оси $Oz$ и в различные моменты времени $t$.

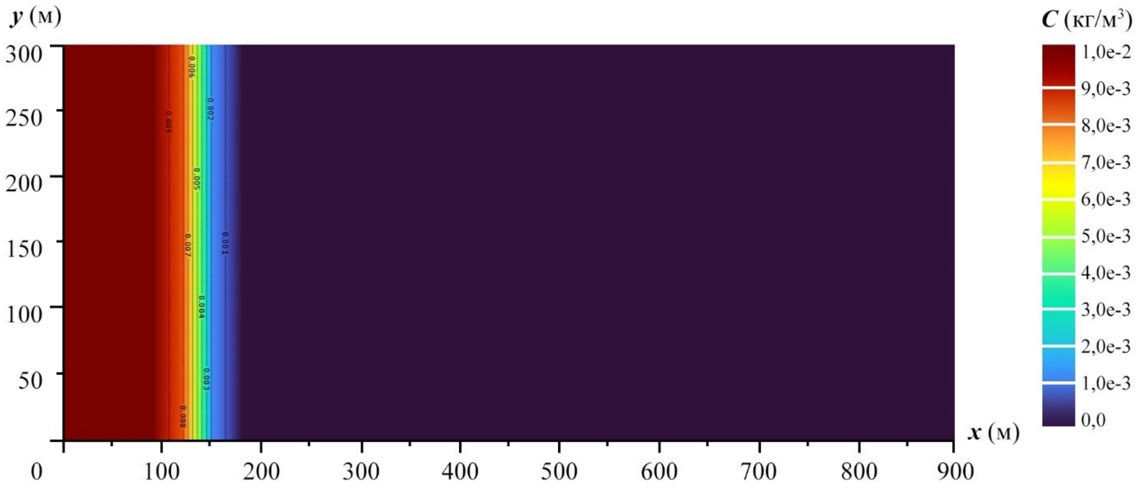


**Рис. 4** Распределение концентрации при $t = 1$ мин. на высоте $z = 2$ м

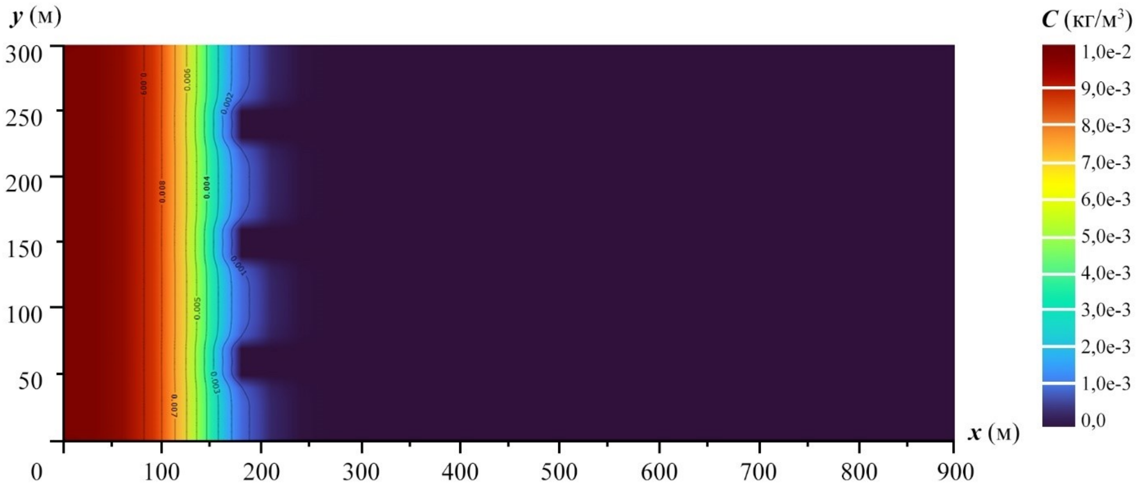


**Рис. 5** Распределение концентрации при $t = 5$ мин. на высоте $z = 2$ м

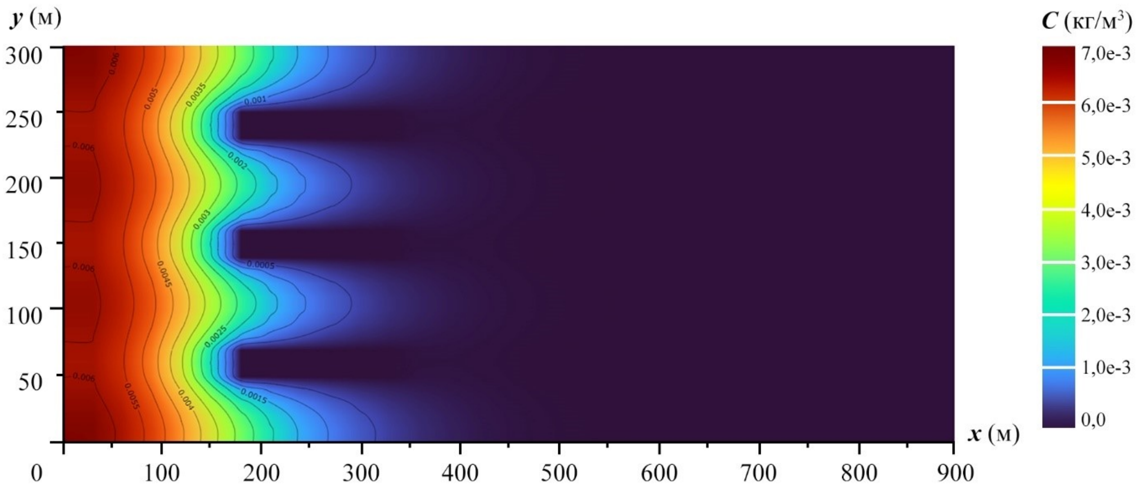


**Рис. 6** Распределение концентрации при $t = 10$ мин. на высоте $z = 2$ м

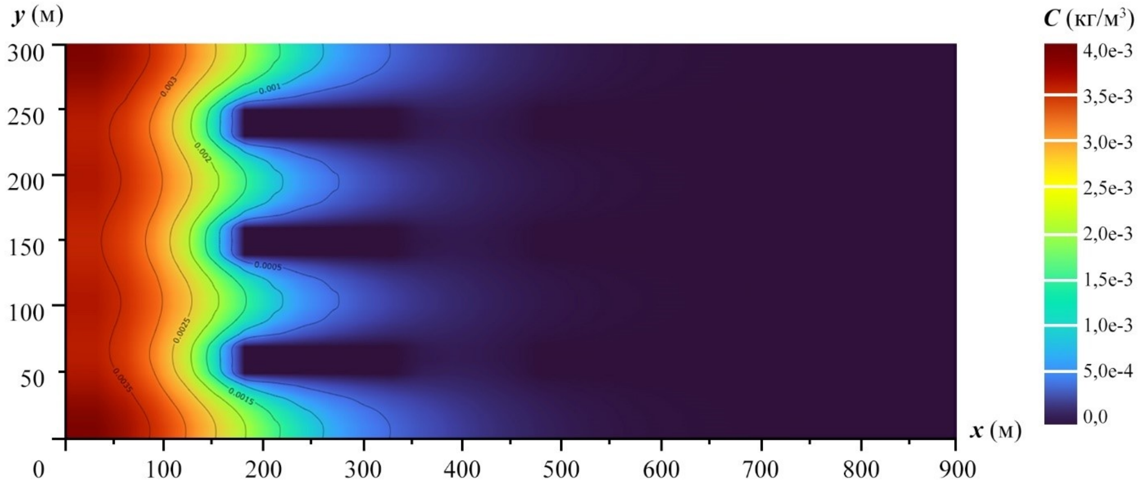


**Рис. 7** Распределение концентрации при $t = 15$ мин. на высоте $z = 2$ м

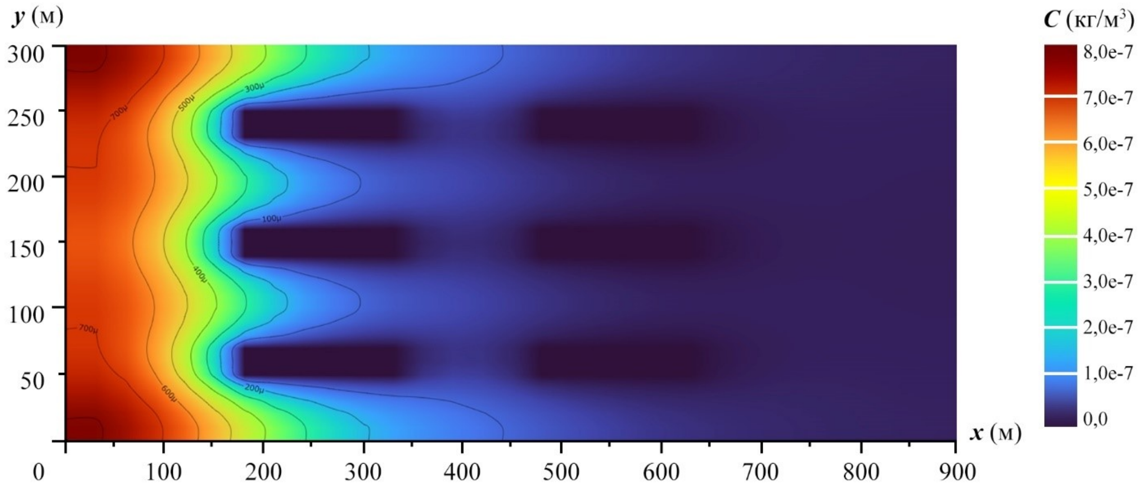


**Рис. 8** Распределение концентрации при $t = 20$ мин. на высоте $z = 2$ м

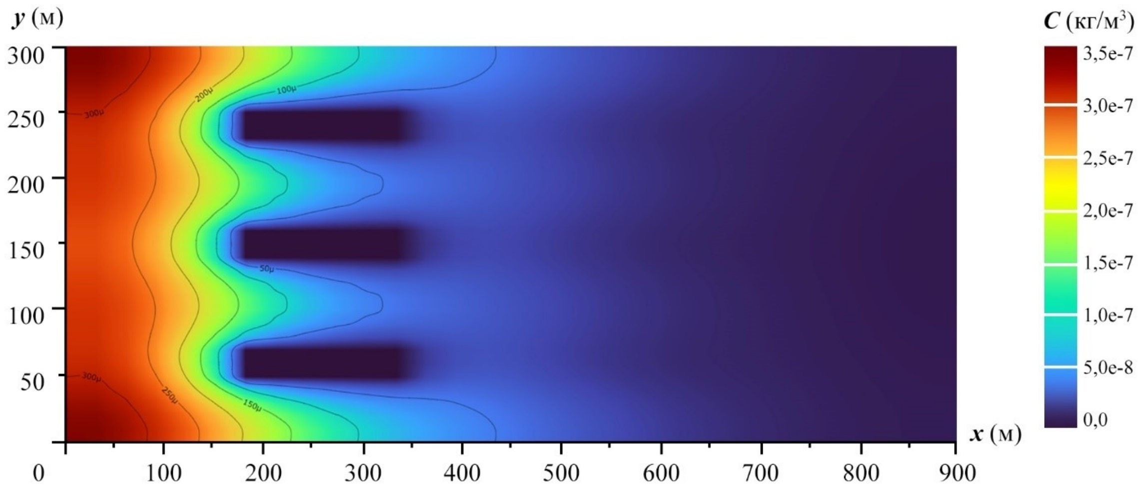


**Рис. 9** Распределение концентрации при $t = 20$ мин. на высоте $z = 18$ м

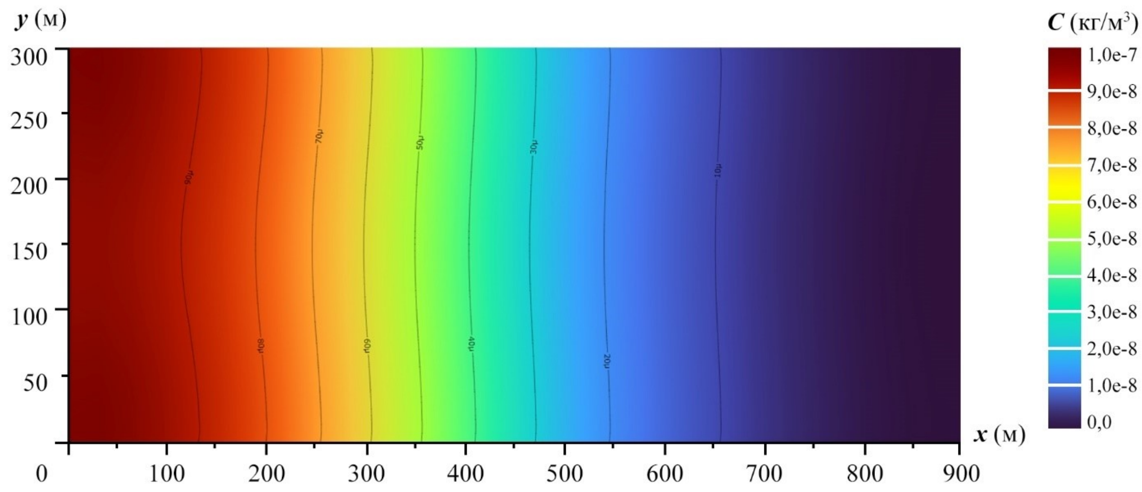


**Рис. 10** Распределение концентрации при $t = 20$ мин. на высоте $z = 25$ м

Из анализа результатов вычислительного эксперимента (рис. 4-10), что при заданных условиях и ограничениях на численное моделирование исследуемого процесса, рассеивание установившегося выброса $CO_2$ происходит достаточно интенсивно, а снижение уровня концентрации, в целом, имеет линейный характер. Следует отметить, что влияние движения автотранспорта на воздушный поток при моделировании не учитывалось.

При легком ветре (до 2-3 м/с) высокие значения концентрации, как и можно было ожидать, наблюдаются вблизи проезжей части. При удалении от источника в подветренную сторону на расстояние около 100 метров концентрация примеси резко снижается, еще через 100 метров значения концентрации близки нулю.

То же самое можно сказать о характере распределения поля концентрации по высоте, с той разницей, что масштаб вертикального массопереноса значительно меньше. Иначе говоря, подъём примеси вверх за счет турбулентных вихрей и температурной конвекции происходит значительно медленней и на значительно меньшее расстояние (высоту) по сравнению с адвективным переносом. Кроме того, ввиду возрастания скорости ветра с высотой, рассеивание примеси с высотой также происходит интенсивнее. Таким образом, на высоте от 25 метров и выше, значения концентрации примеси практически снижаются до нуля (рис. 10).

Здания, прилегающие к автодороге и обтекаемые воздушным потоком, в значительной мере блокируют и понижают скорость ветра, тем самым препятствуют интенсивному переносу примеси в поперечном направлении от уличного каньона (рис. 7-9). Из рисунков видно, что при заданных условиях проведения вычислительного эксперимента, частицы примеси практически не достигают второй линии зданий. То есть, вредная для здоровья концентрация автомобильных выбросы не распространяется вглубь жилых массивов.

Это объясняется несколькими эффектами: в изолированных областях, таких как дорожный каньон, скорость и уровень турбулентности основного потока существенно понижаются, и напротив – за пределами автодорог между высотными зданиями скорость воздушных течений и турбулентность значительно возрастают, интенсивно рассеивая концентрацию примеси. Данный эффект можно считать положительный моментом, однако для избегания образования устойчивых «пятен» загрязнения вдоль самих автодорог, желательно, чтобы ориентация подобных уличных каньонов совпадала с преобладающими направлениями ветров для сохранения их хорошей вентилируемости. Кроме того, плотность застройки вдоль сторон автодорог также необходимо контролировать, чтобы в определенной мере сохранять степень продуваемости в поперечном направлении.

## 5 Заключение

В качестве заключения по проведенной работе можно отметить следующие основные выводы:

– разработана математическая модель для исследования процесса переноса загрязняющей примеси турбулентным потоком воздушной массы в приземном слое атмосферы с учетом влияния элементов городской застройки, метеорологических параметров, параметров протяженного (линейного) источника выброса и свойств самой загрязняющей примеси;
– численный алгоритм поставленной задачи реализован на основе метода конечных разностей с применением неявной разностной схемы второго порядка аппроксимации по времени и пространственным переменным. К особенностям вычислительного алгоритма можно отнести расчет оптимальных значений $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, $\Delta t$ на основе заданных параметров процесса, что позволяет обеспечить вычислительную устойчивость;
– на основании выполненных вычислительных экспериментов и анализе результатов расчетов можно говорить об адекватности предложенного математического аппарата в плане описания исследуемого физического процесса;
– исследовано влияние городской застройки на интенсивность распространения концентрации примеси поперечном направлении от дорожного каньона при низкой скорости основного потока. Результатами расчетов установлено, что в относительно изолированных областях, таких как дорожный каньон, имеет место существенное снижение скорости потока и уровня турбулентности, а уже за пределами каньона примеси рассеивается гораздо интенсивнее. Таким образом, загрязняющая примесь слабо концентрируется в глубине жилых массивов по сторонам от дорог. Однако, во избежание застойных явлений, важно ориентировать городские путепроводы при их проектировании таким образом, чтобы сохранять их проветриваемость.

## Литература


[1] *Равшанов Н., Мурадов Ф., Ахмедов Д.* Численное моделирование процесса переноса и диффузии вредных веществ в атмосфере в сферической системе координат // Проблемы оптимизации сложных систем : материалы XIV международной азиатской школы-семинара, 20-31 июля 2018 г., Кыргызстан : в 2-х ч. Ч. 2.. – Алмата, 2018. – С. 142-151.

[2] *Равшанов Н., Шарипов Д.К., Ахмедов Д.* Моделирование процесса загрязнения окружающей среды с учетом рельефа местности и погодно-климатических факторов // Информационные технологии моделирования и управления. – 2015. – № 3(93). – С. 222-234.

[3] *Шарипов Д.К., Ахмедов Д.Д.* Моделирование процесса переноса вредных веществ в атмосферу с учётом эрозии почвы // Проблемы информатики и энергетики. – 2015. – № 5. – С. 23-32.

[4] *Haeckel E.* Generelle Morphologie der Organismen. Bd.2. – Berlin: Georg Reimer, 1866. – 652 p.

[5] *Наместникова О.В., Топольский Н.Г.* Обзор моделей загрязнения атмосферного воздуха в системе управления качеством среды обитания // Пожары и чрезвычайные ситуации: предотвращение, ликвидация. – 2015. – № 2. – С. 64-70.

[6] *Collett R., Oduyemi K.* Air quality modelling: a technical review of mathematical approaches // Meteorological Applications. – 1997. – Vol. 4. – P. 235-246.

[7] *Pantusheva M., Mitkov R., Hristov P., Petrova-Antonova D.* Air Pollution Dispersion Modelling in Urban Environment Using CFD: A Systematic Review // Atmosphere. – 2022. – Vol. 13. – P. 1-35. – doi: `http://dx.doi.org/10.3390/atmos13101640`.

[8] *Markiewicz M.* A Review of Mathematical Models for the Atmospheric Dispersion of Heavy Gases. Part I. A Classification of Models // Ecological Chemistry and Engineering. – 2012. – Vol. 19. – P. 297-314.

[9] *Baklanov A.* Application of CFD methods for modelling in air pollution problems: possibilities and gaps // Environmental Monitoring and Assessment. – 2000. – Vol. 65. – P. 181-189.

[10] *Kalita P., Ukaszewicz G.* NameNavier-Stokes Equations : an Introduction with Applications. – Cham: Springer, 2016. – 390 p.

[11] *Polyanin A., Nazaikinskii V.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. – 2nd ed. – New York: Chapman and Hall/CRC, 2016. – 1643 p.

[12] *Stocker T.* Introduction to Climate Modelling. – Heidelberg: Springer, 2011. – 182 p.

[13] *Sharipov D., Muradov F., Akhmedov D.* Numerical Modeling Method for Short-Term Air Quality Forecast in Industrial Regions // Applied Mathematics E-Notes. – 2019. – No. 19. – P. 575-584.

[14] *Thomas J.W.* Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. – New York, Springer, 1995. – 437 p.

[15] *Ravshanov N., Akhmedov D.D., Roziyeva G.* GIS based estimation of the vertical wind profile effect on air pollutants disperse in the atmosphere // AIP Conference Proceedings. – 2023. – Vol. 2781. – doi: `http://dx.doi.org/10.1063/5.0144801`.

[16] *Sharipov D., Akhmedov D., Boborakhimov B., Sharipov Kh.* Modelling of Fine Aerosols Diffusive Transport in the Atmosphere // Int. Conf. on Inform. Sci. and Comm. Tech. (ICISCT). – 2022. – P. 1-6. – doi: `http://dx.doi.org/10.1109/ICISCT55600.2022.10146840`.

[17] *Sharipov D., Akhmedov D.* Aggregation of Meteorological and Spatial Data for Air Pollution Modeling // Int. Conf. on Inform. Sci. and Comm. Tech. (ICISCT). – 2021. – P. 1-4. – doi: `http://dx.doi.org/10.1109/ICISCT52966.2021.9670325`.

[18] *Ravshanov N., Akhmedov D., Kravets O.Ja.* Atmospheric dispersion modeling in ecological engineering problems // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 862. – P. 1-8. – doi: `http://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/862/6/062017`.

*Поступила в редакцию 02.02.2024*

UDC 519.6+51-74::628.395

# NUMERICAL MODELING OF TURBULENT FLOW AND AIR POLLUTANT DISPERSION IN URBAN STREET CANYONS

***Ravshanov N., Boborakhimov B.I., Juraboeva O.S.**
*`ravshanzade-09@mail.ru`
Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute,

17A, Buz-2, Tashkent, 100125 Uzbekistan.

Large cities often face challenges in providing an eco-friendly living space. This is crucial in residential areas where the majority resides, aiming for high social and environmental comfort. Key pollution sources include industrial sites, utilities, and notably, road traffic, which is a major contributor. City overpasses can significantly exacerbate pollution levels. Computational fluid dynamics offers effective tools for analyzing and predicting pollutant dispersion, considering air flow dynamics and urban structures. This study focuses on modeling pollutant spread in turbulent flows within street canyons, employing the Navier–Stokes equations, Poisson's equation for pressure, and advection-diffusion equations, solved using a Crank-Nicholson scheme. The findings are presented graphically, with interpretations provided.

**Keywords:** mass transfer in the atmosphere, vehicle emissions, urban development, Navier–Stokes equations, numerical algorithm, Crank–Nicholson scheme, Jacobi method.

**Citation:** Ravshanov N., Boborakhimov B.I., Juraboeva O.S. 2024. Numerical modeling of turbulent flow and air pollutant dispersion in urban street canyons. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 1(55): 8-25.

№ 1(55) 2024

ISSN 2181-8460

# HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

# ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

# PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI

# ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

## № 1(55) 2024

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

**Учредитель:**
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.





Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

**ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X**





**Адрес редакции:**
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(99871) 231-92-45.
E-mail: journals@airi.uz.
Сайт: www.pvpm.uz (journals.airi.uz).

**Дизайн и компьютерная вёрстка:**
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 29.02.2024 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №1. Тираж 100 экз.

# Содержание